Klopsch

§6 Linearkombinationen von Vektoren, lineare Hüllen und Begriff der Basis

<u>GV</u>: Sei K ein Körper, und sei V ein VR über K.

(6.1) <u>Def</u> (Linearkombination)

a) Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $v_1, \dots, v_m \in V$. Dann ist $w \in V$ eine <u>Linearkombination</u> von $v_1, \dots, v_m$, falls es $a_1, \dots, a_m \in K$ gibt mit

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

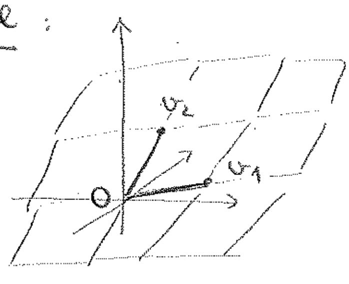
b) Sei $M \subseteq V$. Dann ist $w \in V$ eine Linkomb von Vektoren aus M, falls es $m \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_m \in K$ und $v_1, \dots, v_m \in M$ gibt mit

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m.$$

<u>Bem</u> Der Nullvektor ist stets eine Linearkomb von $v_1, \dots, v_m$ bzw Vektoren aus M:

$$0 = 0 v_1 + \dots + 0 v_m$$ [gilt auch für $m=0$: leere Summe $= 0$]

<u>Bspl</u>:



$V = \mathbb{R}^3$ $K = \mathbb{R}$

$v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$

Linkomb $a_1 v_1 + a_2 v_2$ bilden eine Ebene, die durch $0, v_1, v_2$ festgelegt wird

(6.2) <u>Def</u> (lineare Hülle)

Für $M \subseteq V$ heißt

$$\langle M \rangle = \{ w \in V \mid w \text{ ist Linkomb von Vektoren aus } M \}$$

$$= \{ a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \mid m \in \mathbb{N}_0,\ a_1, \ldots, a_m \in K,\ v_1, \ldots, v_m \in M \}$$

die <u>lineare Hülle</u> (oder das lineare Erzeugnis) von M in V.

<u>Merke</u>: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Ist $M = \{v_1, \ldots, v_m\}$ endlich, so schreibe abkürzend $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_m\} \rangle$

$$= \{ a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \mid a_1, \ldots, a_m \in K \}$$

(6.3) <u>Hilfsatz</u> Seien $w \in V$ und $M \subseteq V$.
Dann gilt $w \in \langle M \rangle$ gdw.
es ein $x \in K^{(M)}$ gibt mit $w = \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$.

<u>Bem</u>: Da $K^{(M)} = \{ x : M \to K \mid x(v) \neq 0 \text{ für nur endl viele } v \in M \}$

ist, hat die Summe $\sum x(v) \cdot v$ nur endlich viele Summanden $\neq 0$ und ist damit ohne Probleme auswertbar.

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$": Sei $w \in \langle M \rangle$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in M$ mit

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m .$$

Offenbar dürfen wir annehmen, daß $v_1, \dots, v_m$ paarweise verschieden sind. (Ansonsten können wir Summanden geeignet zusammenfassen.)

Definiere $x : M \to K$ durch

$$x(v) = \begin{cases} a_i & \text{falls } v = v_i \text{ für ein } i \in \{1, \dots, m\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $x \in K^{(M)}$ und $w = \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$.

„$\Leftarrow$": Sei umgekehrt $w = \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$ für ein geeignetes $x \in K^{(M)}$. Dann gibt es eine endl. Teilmenge $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq M$ der Mächtigkeit $m \in \mathbb{N}_0$, so daß $x(v) = 0$ für $v \in M \setminus \{v_1, \dots, v_m\}$.

Setzt man $a_i = x(v_i)$ für $i \in \{1, \dots, m\}$, so folgt

$$w = \sum_{i=1}^{m} x(v_i) v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i \in \langle M \rangle .$$ //

<u>Beobachtung</u>: Die für den Vektorraum $K^{(M)}$ erklärten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (siehe (4.9) d)) vertragen sich gut mit der Anwendung in (6.3): Für alle $x, y \in K^{(M)}$ und $a \in K$ gilt

$$\sum_{v\in M} x(v)\cdot v + \sum_{v\in M} y(v)\cdot v = \sum_{v\in M} (x+y)(v)\cdot v$$

$$a \sum_{v\in M} x(v)\cdot v = \sum_{v\in M} (ax)(v)\cdot v$$

Wegen $0 \in \langle M\rangle$ erhalten wir mit Hilfe von (5.2):

(6.4) <u>Folgerung</u> Für jedes $M \subseteq V$ ist

$\langle M\rangle$ ein Unterraum von V.

<u>Bew</u>: Nach (6.3) ist

$$\langle M\rangle = \left\{ \sum_{v\in M} x(v)\cdot v \;\middle|\; x \in K^{(M)} \right\}.$$

Die Bedingungen (U1), (U2), (U3) in (5.2) sind daher wie beschrieben erfüllt. //

(6.5) <u>Satz</u> (Charakterisierung der lin Hülle)

Sei $M \subseteq V$. Dann ex genau ein Unterraum U von V mit

- $M \subseteq U$, und
- Ist W ein Unterraum von V mit $M \subseteq W$, so gilt $U \subseteq W$.

Weiterhin gilt $U = \langle M\rangle$.

<u>In Worten</u> „$\langle M\rangle$ ist der kleinste Unterraum von V, der M vollständig enthält"; vgl Bspl in (6.1).

Bew: Zeige zunächst, daß $U = \langle M \rangle$ die gewünschten Eigenschaften hat. Überlege anschließend warum U eindeutig bestimmt ist.

Nach (6.4) ist U ein Unterraum von V. Für jedes $v \in M$ gilt $v = 1 \cdot v \in \langle v \rangle \subseteq \langle M \rangle = U$, also $M \subseteq U$. Sei nun W ein Unterraum von V mit $M \subseteq W$. Zz: Für jedes $u \in U$ gilt $u \in W$. Sei also $u \in U$. Dann ex $m \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_m \in K$, $v_1, \dots, v_m \in M$ mit $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$. Mit $v_1, \dots, v_m \in M \subseteq W$ enthält der Vektorraum W natürlich auch deren Linkombs. Also ist

$$u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in W.$$

Abschließend sei $\tilde{U}$ ein möglicherweise von U verschiedener Unterraum mit den verlangten Eigenschaften. Zz: $\tilde{U} = U$. In der Tat impliziert $M \subseteq U$ bzw $M \subseteq \tilde{U}$ dann $\tilde{U} \subseteq U$ bzw $U \subseteq \tilde{U}$. Also ist $\tilde{U} = U$. //

(6.6) <u>Lemma</u> (Eigenschaften der lin Hülle)

Sei $M \subseteq V$. Dann gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & M \subseteq \langle M \rangle \\ \text{(ii)} & \text{Sind } M_1 \subseteq M_2 \subseteq V \text{, so ist } \langle M_1 \rangle \subseteq \langle M_2 \rangle \\ \text{(iii)} & \langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle \end{array}\right\} \text{Hüllen-eigenschaften}$$

Klotsch

(iv) $M = \langle M \rangle$ gdw M ein Unterraum von V ist

(v) $\langle M \rangle = \bigcap \{ W \mid W$ Unterraum von V mit $M \subseteq W \}$

(vi) Sind U_1, U_2 Unterräume von V, so ist $\langle U_1 \cup U_2 \rangle = U_1 + U_2$.

Bew: Alle Behauptungen außer (ii) und (vi) ergeben sich direkt aus (6.5).

(ii) Seien $M_1 \subseteq M_2 \subseteq V$. Nach (6.5) ist $\langle M_2 \rangle$ ein Unterraum von V, der $M_1 \subseteq M_2$ enthält. Nach (6.5) folgt daher $\langle M_1 \rangle \subseteq \langle M_2 \rangle$.

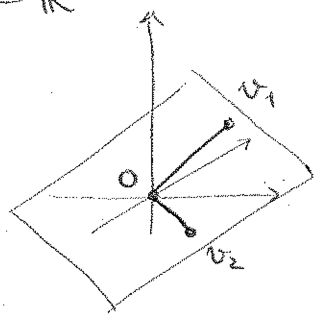
(vi): Seien U_1, U_2 Unterräume von V. Nach (5.5) ist $U_1 + U_2 = \{ u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \}$ ein Unterraum von V. Offenbar gilt $U_1 \cup U_2 \subseteq U_1 + U_2$, da sich jedes $u_1 \in U_1$ als $u_1 + 0$ und jedes $u_2 \in U_2$ als $0 + u_2$ schreiben läßt. Somit zeigt (6.5), daß $\langle U_1 \cup U_2 \rangle \subseteq U_1 + U_2$. Umgekehrt enthält $\langle U_1 \cup U_2 \rangle$ mit allen $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ auch deren Summen $u_1 + u_2$. Daraus folgt $\langle U_1 \cup U_2 \rangle \supseteq U_1 + U_2$ und die Behauptung. //

6.7) Beispiele

Klotsch

a) geometrische Deutung der linearen Hülle

$V = \mathbb{R}^3$



„Zwei Vektoren, die nicht auf einer Geraden durch den Ursprung liegen, haben im $\mathbb{R}^3$ als lineare Hülle die Ebene, die sie mit dem Nullvektor teilen."

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij}, b_i \in K$ für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Dann hat das lin. Gl.system

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ g.d.w. im Standardvektorraum K^m gilt:

$$(b_1, \ldots, b_m) \in \langle (a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn}) \rangle$$

Um dies einzusehen, schreibt man $(*)$ am besten mit Hilfe von Spaltenvektoren um:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

[Wir müssen uns an beide Schreibweisen gewöhnen.]

Klopsch

(6.8) Def (Basis)

a) Eine Teilmenge $M \subseteq V$ heißt eine Basis von V (über K), wenn sich jedes $w \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination von pw versch Elementen aus M schreiben läßt: Zu jedem $w \in V$ ex genau ein $x \in K^{(M)}$ mit $w = \sum_{v \in M} x(v) \cdot v$.

[x ist dann eine Koordinatenfunktion für w bzgl M]

b) Ist M eine endliche Basis von V, mit pw versch Elementen $v_1, \dots, v_m$, so sagen wir auch: $v_1, \dots, v_m$ bilden eine Basis von V. Genauer nennen wir $(v_1, \dots, v_m)$ eine geordnete Basis von V. In diesem Fall sind jedem $w \in V$ dann über die Beziehung

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

eindeutige Koordinaten $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ zugeordnet.

(6.9) Bsple

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^n$. Dann bilden die Standardeinheitsvektoren

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \dots 0), \; \dots, \; e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

eine Basis von V;

Klopsch

Jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in V$ läßt sich

eindeutig schreiben als $x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

b) Verallgemeinerung: Sei I eine bel Menge,

Def für $i \in I$:

$$e_i : I \to K, \quad j \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $\{e_i \mid i \in I\}$ eine Basis

für den Vektorraum $V = K^{(I)}$.

Begründung: Zz

1) $V = \langle \{e_i \mid i \in I\} \rangle$, dh für jedes

$x \in V$ ex eine endl Teilmenge $J \subseteq I$

und $x_j \in K$, $j \in J$, mit $x = \sum_{j \in J} x_j e_j$.

2) Die Darstellung in 1)

ist eindeutig, dh sind $J, \tilde{J} \subseteq I$ endl,

$x_j \in K$ für $j \in J$, $\tilde{x}_j \in K$ für $j \in \tilde{J}$ mit

$$\sum_{j \in J} x_j e_j = \sum_{j \in \tilde{J}} \tilde{x}_j e_j$$

und setzt man

$$x_j = 0 \quad \text{für} \quad j \in \tilde{J} \setminus J$$
$$\tilde{x}_j = 0 \quad \text{für} \quad j \in J \setminus \tilde{J},$$

so gilt

$$x_k = \tilde{x}_k \quad \text{für alle} \quad k \in J \cup \tilde{J}.$$

zu 1): Sei $x \in V$, also $x : I \to K$ mit

$x(i) \neq 0$ für nur endlich viele $i \in I$.

Setze $J = \{ i \in I \mid x(i) \neq 0 \}$ und $x_j = x(j)$ für $j \in J$.

Wir behaupten: $x = \sum_{j \in J} x_j e_j$.

In der Tat gilt für jedes $i \in I$:

$$\Big(\sum_{j \in J} x_j e_j \Big)(i) = \sum_{j \in J} x_j e_j(i) = \begin{cases} x_i \cdot 1 = x(i) & i \in J \\ 0 = x(i) & i \notin J. \end{cases}$$

zu 2): Seien $J, \tilde{J} \subseteq I$ und $x_j, \tilde{x}_j \in K$ für

$j \in J \cup \tilde{J}$ wie beschrieben; sei $k \in J \cup \tilde{J}$.

Dann gilt:

$$x_k = \Big(\sum_j x_j e_j \Big)(k) = \Big(\sum_j \tilde{x}_j e_j \Big)(k) = \tilde{x}_k. \quad //$$

c) Ist $V = \{0\}$ ein Nullraum, so hat V genau eine Basis, nämlich $\emptyset$.

[Warum ist $\{0\}$ keine Basis von V?]

(6.10) Wichtige Fragestellungen

- Hat jeder Vektorraum eine (geordnete) Basis?
- Wie gestaltet sich der ‚Koordinatenwechsel' von einer Basis zur anderen?
- Wie bestimmt man zu einem gegebenen Problem eine möglichst günstige Basis?

[Knobelaufgabe: Bestimme alle Basen für $\mathbb{F}_2^n$ über $\mathbb{F}_2$ für kleine n. Was passiert für $n \to \infty$?]