§ 5 Untervektorräume

GV: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(5.1) Def (Untervektorraum oder linearer Teilraum)

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt Unter(vektor)raum von V, falls U bzgl der bereits erklärten Verknüpfungen + und · selbst ein Vektorraum ist.

(5.2) Hilfssatz (Unterraumkriterium)

Sei $U \subseteq V$. Dann bildet U einen Unterraum von V gdw die folg Bed erfüllt sind:

(U1) $U \neq \emptyset$

(U2) $x+y \in U$ für alle $x,y \in U$

(U3) $ax \in U$ für alle $a \in K$, $x \in U$.

Bew: „$\Rightarrow$" Ist U ein Unterraum von V, so gilt $U \neq \emptyset$ wegen $0 \in U$ und die beiden anderen Bed sind notwendigerweise auch erfüllt.

„$\Leftarrow$" Seien (U1)–(U3) erfüllt. Dann liefern die Einschränkungen von $+, \cdot$ auf $U \times U$ bzw $K \times U$ tatsächlich Verknüpfungen $+ : U \times U \to U$, $\cdot : K \times U \to U$. Die Axiome (A1), (A2), (SM1)–(SM4) vererben sich direkt. Wegen (U3) und (4.8) b) ist für jedes $x \in U$ auch $-x = (-1)x \in U$.

Klopsch.

Wegen (U1) ex $z \in U$ und mittels (U2) folgern wir: $0_V = z + (-z) \in U$. Damit sind auch (A3), (A4) abgedeckt. //

<u>Bem:</u> Der Nullvektor von V ist also stets auch der Nullvektor eines Unterraumes U.

(5.3) <u>Bsple und Fast-Bsple</u>

a) Jedenfalls sind V und $\{0\}$ stets Unterräume, die 'trivialen' Unterräume.

b) Seien $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) fest gegeben.

Dann bildet die Menge aller Lösungen $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

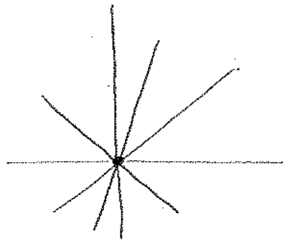
einen Unterraum des Standardvektorraums K^n

c) Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$.

Neben V und $\{0\}$ sind die Unterräume von V gerade die Teilmengen $U \subseteq V$, die den Geraden durch den Ursprung $0 = (0,0)$ entsprechen.

Die übrigen Geraden bilden

<u>keine</u> linearen Unterräume.



d) Wie sehen die Unterräume von $\mathbb{F}_2^n$ aus?
Wieviele gibt es in Abh von n?

$\rightsquigarrow$ Kombinatorik, Kodierungstheorie

e) 'Checksummen-Unterraum':
Sei K ein (endl) Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$U = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0 \}$$

ein Unterraum von K^n. [Spezialfall von b)]

f) I eine bel Menge
Nach (4.5) d) ist $V = K^I = \{ x \mid x : I \to K \}$
ein Vektorraum über K.
Für unendl I, bspw $I = \mathbb{N}$, bildet

$$U = K^{(I)} = \{ x \in K^I \mid x(i) \neq 0 \text{ für nur endl viele } i \in I \}$$

einen echten (dh $\neq V$) Unterraum von V.
(Für endl I ist einfach $U = V$.)

<u>Bem</u>: Die Vektorräume $K^{(I)}$ sind von grundlegender Bedeutung insofern, als daß jeder Vektorraum über K nur 'unwesentlich verschieden' von einem geeigneten $K^{(I)}$ ist.

Klopsch

(5.4) <u>Def</u> (Summe von Unterräumen)

Die <u>Summe</u> einer Menge $\mathfrak{U}$ von Unterräumen von V ist

$$\sum \mathfrak{U} = \sum_{U \in \mathfrak{U}} U = \{ x_1 + \ldots + x_r \mid r \in \mathbb{N}_0, \; x_j \in \bigcup \mathfrak{U} \text{ für } 1 \leq j \leq r \}.$$

Für endlich viele Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ von V ist

$$\sum \{U_1, \ldots, U_n\} = U_1 + \ldots + U_n$$

$$= \{ x_1 + \ldots + x_n \mid x_i \in U_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \}.$$ [Übung!]

(5.5) <u>Hilfssatz</u> (Durchschnitt und Summe von Unterräumen)

Sei $\mathfrak{U}$ eine Menge von Unterräumen von V.

a) Ist $\mathfrak{U} \neq \emptyset$, so ist $\bigcap \mathfrak{U} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ wiederum ein Unterraum von V.

b) Die Summe $\sum \mathfrak{U} = \sum_{U \in \mathfrak{U}} U$ ist wiederum ein Unterraum von V.

<u>wichtigster Spezialfall</u>: Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ und die Summe $U_1 + U_2$ zweier Unterräume ist jeweils wieder ein Unterraum.
[Wohingegen $U_1 \cup U_2$ in der Regel <u>kein</u> Unterraum ist!]

<u>Bew</u>: Wir verwenden (5.2) und setzen für a) stets $\mathfrak{U} \neq \emptyset$ voraus.

Klopsch

Nach der Bem in (5.2) gilt $0 \in U$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$, also $0 \in \bigcap \mathfrak{U}$. Zudem gilt (notfalls über die leere Summe) $0 \in \sum \mathfrak{U}$.
Damit ist (U1) jeweils erfüllt.

Seien $x, y \in \bigcap \mathfrak{U}$ und $a \in K$. Dann gilt $x, y \in U$, also auch $x+y, ax \in U$ für jedes $U \in \mathfrak{U}$, also $x+y, ax \in \bigcap \mathfrak{U}$.

Seien nun $x, y \in \sum \mathfrak{U}$ und $a \in K$. Dann gilt

$x = x_1 + \ldots + x_r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, $x_j \in \bigcup \mathfrak{U}$,

$y = y_1 + \ldots + y_s$ mit $s \in \mathbb{N}_0$, $y_j \in \bigcup \mathfrak{U}$.

Somit ist

$x + y = x_1 + \ldots + x_r + y_1 + \ldots + y_s \in \sum \mathfrak{U}$, und

wegen $ax_j \in \bigcup \mathfrak{U}$ für $1 \leq j \leq r$ auch

$ax = ax_1 + \ldots + ax_r \in \sum \mathfrak{U}$.

Damit sind auch (U2), (U3) jeweils erfüllt. //