Klopsch

Kapitel II : Vektorräume

§ 4 Körper und Vektorräume

(4.1) Def (Körper)

Ein Körper $K = (K, +, \cdot)$ ist eine Menge K, für welche eine 'Addition'

$$+ : K \times K \to K \,, \quad (a, b) \mapsto a+b$$

und eine 'Multiplikation'

$$\cdot : K \times K \to K \,, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b = ab$$

gegeben sind, so daß die folgenden 'Rechenregeln' ~~für alle a, b, c ∈ K~~ erfüllt sind:

(A1) $a+(b+c) = (a+b)+c$ (+ assoziativ) für $a, b, c \in K$

(A2) $a+b = b+a$ (+ kommutativ) für $a, b \in K$

(A3) Es ex genau ein Element in K, welches wir mit 0 bezeichnen (Nullelement); für das gilt: $a+0 = 0+a = a$ für $a \in K$

(A4) Zu jedem $a \in K$ gibt es genau ein Element in K, welches wir mit $-a$ bezeichnen (das zu a inverse Element bzgl $+$), für das gilt: $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

(M1) $a(bc) = (ab)c$ ($\cdot$ assoz) für $a, b, c \in K$

(M2) $ab = ba$ ($\cdot$ kommutativ) für $a, b \in K$

(M3) Es ex genau ein von 0 verschiedenes Element in K, welches wir mit 1 bezeichnen (<u>Einselement</u>), für das gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für $a \in K$.

(M4) Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau ein Element in K, welches wir mit $\frac{1}{a}$ oder auch a^{-1} bezeichnen (das zu a inverse Element bzgl $\cdot$), für das gilt: $a \frac{1}{a} = \frac{1}{a} a = 1$.

(D) $(a+b)c = ac + bc$ und
$a(b+c) = ab + ac$ für $a, b, c \in K$ (Distributivgesetze, merke: Punkt vor Strich)

<u>Bem</u>: Das obige halbformale Axiomensystem ist nicht minimal.

(4.2) <u>Folgerungen</u> Bekannte Regeln / Schreibweisen lassen sich leicht herleiten, bspsweise

a) $a \cdot 0 = 0$ für alle $a \in K$

<u>Bew</u>: Sei $a \in K$. Dann gilt

$$a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = (-a \cdot 0 + a \cdot 0) + a \cdot 0$$
$$= -a \cdot 0 + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -a \cdot 0 + a \cdot (0+0)$$
$$= -a \cdot 0 + a \cdot 0 = 0. //$$

b) $(-a)b = -(ab)$ für alle $a, b \in K$

<u>Bew</u>: Seien $a, b \in K$. Dann gilt:

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = b0 = 0$$

und daher $(-a)b = -(ab)$ wegen der Eindeutigkeit in (A4). //

c) $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$ („K <u>nullteilerfrei</u>")
für alle $a, b \in K$.

<u>Bew</u>: Seien $a, b \in K$ mit $ab = 0$. Ist $a \neq 0$,
so folgt $b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a} \cdot a) b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0 = 0$. //

Wir nutzen die Schreibweisen

$$a - b := a + (-b) \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = a \frac{1}{b} \quad (\text{für } b \neq 0).$$

(4.3) <u>Beispiele und Nicht-Beispiele</u>

a) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen $+, \cdot$
sind Körper
(Körper der komplexen Zahlen)

b) $\mathbb{Z}$, die ganzen Zahlen, bilden <u>keinen</u> Körper:
(M4) nicht erfüllt [später: $\mathbb{Z}$ <u>Ring</u>]

c) <u>endliche Körper</u> (! ⇝ Anwendungen für Computertechnik/programming)
[finite <u>fields</u>]

$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit

+	0	1
0	0	1
1	1	0 !

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Klotsch

$\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$ ... ✓

$\mathbb{F}_4$? [geht, ⇝ Übung] ⟶

$\mathbb{F}_5$? [geht, siehe unten].

$\mathbb{F}_6$? [geht nicht!]

Kartenquadrat:

B ♦	D ♠	K ♣	A ♥
D ♥	B ♣	A ♠	K ♦
K ♠	A ♦	B ♥	D ♣
A ♣	K ♥	D ♦	B ♠

[griech.-lat. Quadrate]

anwendungsrelevant vor allem: $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8, \mathbb{F}_{16}, \ldots$

(4.4) Schreibweise

Sei K ein Körper. Für $a \in K$, $m \in \mathbb{Z}$ def

$$ma = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{m} & m \geq 0 \\ -(-m)a & m < 0. \end{cases}$$

Für $m \cdot \underbrace{1}_{\in K}$ schreibe kurz m. [auf Zusammenhang achten!]

Merke: $\underbrace{m}_{\in \mathbb{Z}} a = (m \cdot 1) a = \underbrace{m}_{\in K} a$, und

$$(m+n)a = ma + na$$
$$(mn)a = m(na) \qquad \text{für } m, n \in \mathbb{Z}, a \in K.$$

(4.5) $\mathbb{Z}$ modulo m (halbformal)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Bekanntlich gibt es zu jedem $a \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$, so daß

$$a = qm + r \quad \text{und} \quad 0 \leq r < m.$$

[Division ganzer Zahlen mit Rest]

Klotzsch

Bezeichne den <u>Rest</u> r von a bei Division durch m mit $r_m(a)$.

Auf der Menge (der auftretenden Reste)

$$R_m(\mathbb{Z}) = \{0, 1, .., m-1\}$$

def. $+_m$ und $\cdot_m$ wie folgt:

$$a +_m b = r_m(a+b)$$

$$a \cdot_m b = r_m(ab) \qquad \text{für } a, b \in R_m(\mathbb{Z}).$$

Dann gelten (einfach, aber etwas mühselig zu prüfen) die Rechenregeln (A1) – (A4), (M1) – (M3), (D) für $R_m(\mathbb{Z})$, sofern $m \neq 1$.

(M4) gilt manchmal (zB $m \in \{2, 3, 5\}$) und manchmal nicht (zB $m \in \{4, 6\}$).

(4.6) <u>Satz (endl. Primkörper)</u>

Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $R_m(\mathbb{Z})$ ein Körper gdw m eine Primzahl ist.

<u>Bem</u>: $\rightsquigarrow$ eine Vielzahl von interessanten endl. Körpern $\mathbb{F}_p = R_p(\mathbb{Z})$ für $p \in \mathbb{P}$.

<u>Bew</u>: wird später nachgeholt. //

Klopsch

(4.7) Def (Vektorraum)

Sei K ein Körper (bspw $K = \mathbb{R}$). Ein Vektorraum $V = (V, +, \cdot)$ über K ist eine Menge V, für welche eine 'Addition'

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

und eine 'Skalarmultiplikation'

$$\cdot : K \times V \to V, \quad (a, x) \mapsto ax$$

gegeben sind, so daß die folgenden 'Rechenregeln' erfüllt sind:

Elmte von K heißen Skalare, Elmte von V heißen Vektoren.

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ für $x, y, z \in V$

(A2) $x + y = y + x$ für $x, y \in V$

(A3) Es ex genau ein Elmt in V, welches wir mit $0 = 0_V$ bezeichnen (Nullvektor), für das gilt: $x + 0 = 0 + x = x$ für $x \in V$

(A4) Zu jedem $x \in V$ ex genau ein Elmt in V, welches wir mit $-x$ bezeichnen, für das gilt: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

[(A1) – (A4) sind analog zu entspr Anforderungen an $+$ für einen Körper ⇝ abelsche Gruppe]

Klopsch

(SM1) $(ab)x = a(bx)$ für $a, b \in K$ und $x \in V$

(SM2) $1x = x$ für $x \in V$ $(1 = 1_K \in K)$

(SM3) $a(x+y) = ax + ay$ für $a \in K$ und $x, y \in V$

(SM4) $(a+b)x = ax + bx$ für $a, b \in K$ und $x \in V$

Bem: Manchmal werden Vektoren durch eine besondere Schreibweise, zB $\underline{x}$, $\vec{x}$, $\mathbf{x}$, $\mathfrak{x}$, …, von Skalaren getrennt.

(4.8) Folgerungen

(a) $0_K \cdot x = 0_V$ und $a \cdot 0_V = 0_V$ für $x \in V$, $a \in K$.

Bew: Seien $x \in V$ und $a \in K$. Dann gelten

$$0 \cdot x = 0 + 0x = (-0x + 0x) + 0x = -0x + (0x + 0x)$$
$$= -0x + (0+0)x = -0x + 0x = 0$$ und

$$a \cdot 0 = 0 + a \cdot 0 = (-a0 + a0) + a0 = -a0 + (a0 + a0)$$
$$= -a0 + a(0+0) = -a0 + a0 = 0. \quad //$$

(b) $(-a)x = -ax = a(-x)$ für $a \in K$; $x \in V$,

insbesondere $(-1)x = -x$.

Bew: Seien $a \in K$, $x \in V$. Dann gelten

$$(-a)x + ax = (-a+a)x = 0 \cdot x = 0$$ und

$$a(-x) + ax = a(-x+x) = a \cdot 0 = 0,$$

also wegen der Eindeutigkeit in (A4)

$$(-a)x = -ax = a(-x). \quad //$$

c) Aus $ax=0$ folgt $a=0$ oder $x=0$,
für $a\in K$ und $x\in V$.

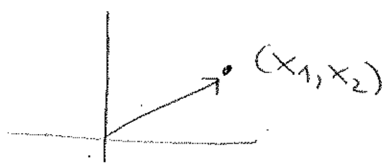
<u>Bew</u>: Seien $a\in K$, $x\in V$ mit $ax=0$.
Sei $a\neq 0$. Dann ist
$$x = 1\cdot x = \left(\tfrac{1}{a}a\right)x = \tfrac{1}{a}(ax) = \tfrac{1}{a}\,0 = 0. \quad //$$

Wir nutzen auch für Vektoren $x,y\in V$ die übliche Schreibweise $x-y = x+(-y)$.

(4.9) <u>Beispiele</u>

a) $K=\mathbb{R}$ und $V=\mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$
mit
$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$
Add/Multipl in $\mathbb{R}$
$$a(x_1,x_2) = (ax_1,\ ax_2)$$

bildl Darstellung



mögl Deutung:
- Ortsvektor in der Ebene
- Kraftvektor, Geschwindigkeitsvektor

} klassische Mechanik

b) K bel Körper, $n\in\mathbb{N}$ <u>Standardvektorraum</u>
$$V=K^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n\in K\}$$
mit
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
$$a(x_1,\dots,x_n) = (ax_1,\dots,ax_n)$$
für $x=(x_1,\dots x_n)$, $y=(y_1,\dots y_n)\in V$, $a\in K$.

Klopsch

konkret: für $K = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, $n=2$

$$V = \mathbb{F}_2^{\,2} = \{ \underbrace{(0,0)}_{0}, \underbrace{(1,0)}_{x}, \underbrace{(0,1)}_{y}, \underbrace{(1,1)}_{x+y} \}$$

bildl. Darstellung:

Merke: $K^0 = \{0\}$ [ergibt sich automatisch aus der Interpretation $K^n = \mathrm{Abb}(\{1,2,\dots,n\}, K)$]

c) Lösungsraum einer homogenen linearen Differentialgleichung, etwa

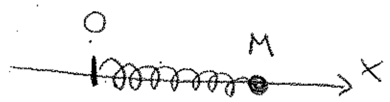
Masse

$$\boxed{m\,\ddot{x} = -k\,x}$$

Ortskoord.

$\frac{d^2x}{dt^2}$ Beschleunigung

Federkonstante



Massenpunkt M mit Masse m und zeitabh. Koord $x = x(t)$

Hookesches Gesetz (17. Jhd)

„ungedämpfter harmonischer Oszilator"

Die Menge aller Lösungsfunktionen

$$x : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto x(t)$$

bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$!

d) I eine bel. Menge, zB $I = \{1,2,3\}$, $I = \mathbb{N}$, $I = (0,1)$, $I = [0,1]$, $I = \mathbb{R}$, …

K ein Körper

Klopsch

$V = \mathrm{Abb}(I, K) \left(= K^I\right)$

Menge aller Abb $x : I \to K,\ i \mapsto x(i)$

mit $(x+y)(i) = x(i) + y(i)$ für $x, y \in V$

$(ax)(i) = a\,x(i)$ $a \in K$

Merke: $I = \{1, \dots, n\}$ führt wieder zu K^n wie in b):

$x : \{1, \dots, n\} \to K$ ist durch

$x_1 = x(1), \dots, x_n = x(n)$ gegeben.

6
7

e) Jeder Vektorraum, der nur aus dem Nullvektor besteht, heißt Nullvektorraum.

Bem zu b): Statt „Zeilenvektoren" schreibt man häufig auch „Spaltenvektoren". Wir brauchen später beides, verwenden zunächst fast ausschließlich n-Tupel in der Form

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n$.