Klopsch

§ 3 Mächtigkeit von Mengen

(3.1) Def

a) Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig (von gleicher Mächtigkeit oder Kardinalität), falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
[Umkehrfkt liefert dann ebenfalls eine Bijektion $f^{-1} : B \to A$]
Wir schreiben dann $A \approx B$.

b) A heißt endlich, falls $A = \emptyset$ oder $A \approx \{1, 2, .., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Ist in diesem Fall $f : \{1, 2, .., n\} \to A$ eine Bijektion so gilt $A = \{a_1, .., a_n\}$, wobei $a_i = f(i)$ für $i \in \{1, .., n\}$ paarweise verschieden sind.

c) Merke: Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt offenbar
$\{1, .., m\} \approx \{1, .., n\}$ gdw $m = n$.
Wir setzen

$$|A| = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ n & \text{falls } A \approx \{1, 2, .., n\} \text{ endlich} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich (dh nicht endlich)} \end{cases}$$

„Mächtigkeit / Kardinalität von A"

[Bem: Die Kardinalität von unendlichen Mengen kann genauer unterschieden werden!]

Klotzsch

(3.2) Beispiele

a) $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$:

[Mengen, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind, heißen abzählbar unendlich.]

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & , & 1 & , & -1 & , & 2 & , & -2 & , & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 1 & , & 2 & , & 3 & , & 4 & , & 5 & , & \dots \end{array}$$

$\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$: Es genügt zz:

$$\mathbb{Q}_{>0} = \{ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \} \approx \mathbb{N},$$

denn ist $\mathbb{Q}_{>0} = \{ q_1, q_2, \dots \}$, so folgt $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ über

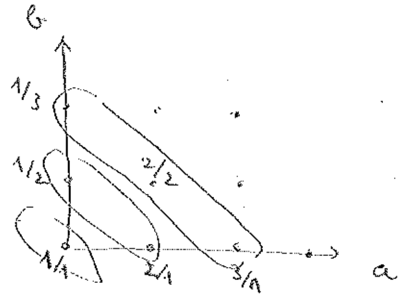
$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & , & q_1 & , & -q_1 & , & q_2 & , & -q_2 & , & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \end{array}$$

Es gilt: $\mathbb{Q}_{>0} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \}$

$$= \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i \quad \text{[disjunkte Vereinigung]},$$

wobei $A_i = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd mit } a+b = i+1 \}$ jeweils endlich ist.

Bspsweise ist $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1/2, 2\}$, $A_3 = \{1/3, 3\}, \dots$



Also gilt $\mathbb{Q}_{>0} \approx \mathbb{N}$.

Klopsch

c) $\mathbb{R} \approx (0,1)$

Die Abb. $(0,1) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{1-|2t-1|}{2t-1} & t \neq 1/2 \\ 0 & t = 1/2 \end{cases}$

liefert eine Bijektion [Übung!]

$(0,1)$ ist nicht abzählbar unendlich, sondern überabzählbar!

angenommen doch:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0, x_{11}\ x_{12}\ x_{13} \ldots \\ x_2 = 0, x_{21}\ x_{22}\ x_{23} \ldots \\ x_3 = 0, x_{31}\ x_{32}\ x_{33} \ldots \\ \vdots \end{array}$$

„Cantorsches Diagonalargument"

setze $y = 0, y_1\ y_2\ y_3 \ldots$ mit $y_i \neq x_{ii}$

dann ist $y \notin \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ Ⓦ

(3.3) Kontinuumshypothese

1tes Hilbertsches Problem (ICM Paris 1900, 23 Probleme)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ mit $|X| = \infty$.

Gilt dann $X \approx \mathbb{N}$ oder $X \approx \mathbb{R}$?

Paul Cohen (1963): mit den üblichen Axiomen der Mengenlehre ist die Frage unentscheidbar!