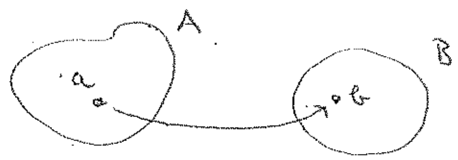
Klopsch

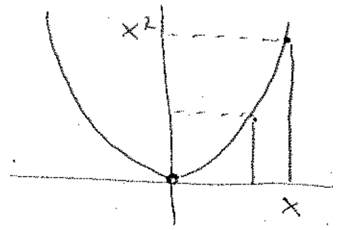
§ 2 Abbildungen

(2.1) Motivation

Seien A, B Mengen. Eine Abbildung (oder Funktion) von A nach B ist eine „Vorschrift", die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet.



Bspl
- Die Vorschrift $x \mapsto x^2$ liefert eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



- Die Vorschrift
  $n \mapsto$ die $n$te Nachkommastelle der Kreiszahl $\pi = 3{,}14159265\ldots$
  liefert eine Abb $\mathbb{N} \to \{0, 1, 2, .., 9\}$
- Es gibt Abbildungen, für die die entsprechende Vorschrift noch viel schwieriger anzuwenden, sogar anzugeben wäre! 3

4

(2.2) **Def**: Seien A, B Mengen. Eine Abbildung α von A nach B ist eine Relation $\alpha \subseteq A \times B$ mit folgender Eigenschaft:

Klopsch

Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a,b) \in \alpha$.

Wir schreiben dann $\alpha : A \to B$ und

$a\alpha = b$ bzw $a^\alpha = b$, falls $(a,b) \in \alpha$.

<u>NB</u>: Oft werden Abb auch von links geschrieben, etwa in der Analysis: zB

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ führt zu $f(x) = x^2$

(statt $xf = x^2$)

Wir brauchen später beide Schreibweisen, bevorzugen zZ die Rechts-Notation.

Das Element $b = a\alpha$ heißt <u>Bild von a</u> unter α.

Die Menge

es existiert

$$\text{Bild}\,\alpha = \{ b \in B \mid \exists a \in A : b = a\alpha \}$$
$$= \{ a\alpha \mid a \in A \}$$

heißt das <u>Bild von α</u>.

Die Menge

$A = \{ a \mid \exists x \in \alpha$: die erste Koord von x ist gleich $a \}$

heißt der <u>Definitionsbereich</u> von α.

<u>NB</u>: α kennt Bild α, aber nicht B!

Für uns sind die Funktionen

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\vartheta \mapsto \sin\vartheta$,

$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $\vartheta \mapsto \sin\vartheta$ gleich.

(2.3) Def: Seien A, B Mengen.

a) $\mathrm{Abb}(A,B) = \{ \alpha \mid \alpha : A \to B$ ist eine Abb $\}$

ist die Menge aller Abb von A nach B.

b) Eine Abb $\alpha : A \to B$ heißt

- injektiv, falls aus $a\alpha = a'\alpha$ stets $a = a'$ folgt

  (äquivalent: $a \neq a'$ impliziert $a\alpha \neq a'\alpha$)

- surjektiv (auf B), falls $\mathrm{Bild}\,\alpha = B$ ist

- eine Bijektion von A auf B, falls α injektiv und surjektiv (auf B) ist

Man schreibt kurz auch:

$\alpha : A \twoheadrightarrow B$ ist surjektiv

$\alpha : A \leftrightarrow B$ ist bijektiv

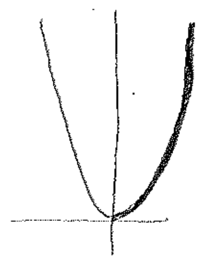
und denkt sich „auf B" dazu.

(2.4) Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv

die Einschränkung auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \}$

$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist bijektiv



b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Abb

$\alpha = \alpha_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$

heißt affin linear.

Klopsch

<u>Beh</u>: Für $a \neq 0$ ist $\alpha = \alpha_{a,b}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ auf sich.

<u>Bew</u>: Sei $a \neq 0$.

<u>Injektivität</u>: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x\alpha = y\alpha$.
Dann gilt $ax + b = ay + b$, also $ax = ay$, wegen $a \neq 0$ also $x = y$.

<u>Surjektivität</u>: Sei $y \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x\alpha = y$. Setze $x = \frac{1}{a}(y - b)$. Dann gilt:

$$x\alpha = a\left(\frac{1}{a}(y-b)\right) + b = y - b + b = y. \quad //$$

c) $\mathrm{Abb}(\emptyset, A) = \{\emptyset\}$

$\mathrm{Abb}(A, \emptyset) = \emptyset$ für $A \neq \emptyset$

$\mathrm{Abb}(\{1,2,3\}, \{0,1\})$ besteht aus 8 Elementen,

zB $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \{(1,0), (2,1), (3,1)\}$

d) Sei A eine Menge. Dann ist

$$\mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathrm{Abb}(A, \{0,1\}), \quad T \mapsto \chi_T \quad \text{wobei}$$

eine Bijektion $\qquad \chi_T : A \to A, \; a\chi_T = \begin{cases} 0 & a \notin T \\ 1 & a \in T \end{cases}$

von der Potenzmenge von A auf die Abbmenge $\mathrm{Abb}(A, \{0,1\})$. [Übung!]

Klopsch

(2.5) <u>Def / Satz</u>

a) Seien $\alpha: A \to B$, $\beta: B \to C$, $\gamma: C \to D$ Abbildungen.

Das <u>Kompositum</u> (die Hintereinanderausführung) von α und β ist

$$\alpha\beta: A \to C, \quad a \mapsto (a\alpha)\beta$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\beta"'] & B \arrow[r, "\beta"] & C \end{tikzcd}$$

[Schreibt man Abb von links, so setze

$$\beta \circ \alpha: A \to C, \quad a \mapsto \beta(\alpha(a)) \quad .$$]

„nach"

Es gilt das <u>Assoziativgesetz</u>

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\beta"'] & \cdot \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\beta\gamma"'] & \cdot \arrow[r, "\gamma"] & D \end{tikzcd}$$

b) Die <u>identische Abb</u> auf einer Menge A ist

$$id_A: A \to A, \quad a \mapsto a.$$

c) Sei $\alpha: A \to B$ injektiv. Dann ist

$\alpha^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in \alpha \}$ eine Abb

$\alpha^{-1}: \mathrm{Bild}(\alpha) \to A$ mit $\alpha\alpha^{-1} = id_A$ und $\alpha^{-1}\alpha = id_{\mathrm{Bild}(\alpha)}$.

Sie heißt die <u>Umkehrabb</u> von α.

[Seien $(b,a), (b,a') \in \alpha^{-1}$. Dann gilt

$a\alpha = b = a'\alpha$, da α injektiv ist, also $a = a'$.

Somit ist $\alpha^{-1}: \mathrm{Bild}(\alpha) \to A$ eine Abb.

Die Beh $\alpha\alpha^{-1} = id_A$ und $\alpha^{-1}\alpha = id_{\mathrm{Bild}(\alpha)}$ sind klar.]

Klopsch

(2.6) <u>Lemma</u> Sei $\alpha : A \to B$.

Dann gilt:

a) α ist injektiv gdw

$\exists B_0 \subseteq B \ \exists \beta \in \mathrm{Abb}(B_0, A) : \alpha\beta = \mathrm{id}_A$

b) α ist surjektiv auf B gdw

$\exists \gamma \in \mathrm{Abb}(B, A) : \gamma\alpha = \mathrm{id}_B$.

<u>Bew</u> a) „$\Rightarrow$" Sei α injektiv. Dann erfüllen $B_0 = \mathrm{Bild}(\alpha)$ und $\beta = \alpha^{-1}$ die Bedingungen.

„$\Leftarrow$" Seien $B_0 \subseteq B$ und $\beta \in \mathrm{Abb}(B_0, A)$ mit $\alpha\beta = \mathrm{id}_A$.
Zz: α injektiv. Seien $a, a' \in A$ mit $a\alpha = a'\alpha$.
Dann folgt $a = a\,\mathrm{id}_A = a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta = (a'\alpha)\beta$
$= a'(\alpha\beta) = a'\,\mathrm{id}_A = a'$.

b) „$\Rightarrow$" Sei α surjektiv auf B. Zu jedem $b \in B$ ex dann ein $a_b \in A$ mit $a_b\alpha = b$.
Definiere $\gamma : B \to A$, $b \mapsto a_b$. Offenbar gilt dann $b(\gamma\alpha) = (b\gamma)\alpha = a_b\alpha = b$ für jedes $b \in B$, also $\gamma\alpha = \mathrm{id}_B$.

[Stillschweigend haben wir das <u>Auswahlaxiom</u> benutzt: Für jede Menge M ex
$\varphi : \mathcal{P}(M)\setminus\{\emptyset\} \to M$ mit $X\varphi \in X$ für $\emptyset \neq X \subseteq M$.]

„Socken $\Leftrightarrow$ Schuhe"

„$\Leftarrow$" Sei $\gamma \in \mathrm{Abb}(B, A)$ mit $\gamma\alpha = \mathrm{id}_B$. Zz: α surj auf B. $\frac{4}{5}$

Sei $b \in B$. Dann ist $a = b\gamma \in A$ und

$a\alpha = (b\gamma)\alpha = b(\gamma\alpha) = b\,\mathrm{id}_B = b$. //

Klopsch

(2.7) Hilfssatz Sei $\alpha : A \to B$.

Dann ist α bijektiv auf B gdw

$\beta, \gamma : B \to A$ ex mit $\alpha\beta = id_A$ und $\gamma\alpha = id_B$.

In diesem Fall gilt dann $B = \text{Bild}(\alpha)$

und $\beta = \gamma = \alpha^{-1}$.

[„$\alpha : A \to B$ hat eine Umkehrabb. $\alpha^{-1} : B \to A$"]

Bew „$\Rightarrow$": Sei α bijektiv auf B.

Nach (2.6) b) ex $\gamma : B \to A$ mit $\gamma\alpha = id_B$.

Offenbar ist dann $B = \text{Bild}(\alpha)$, und $\beta = \alpha^{-1} : B \to A$

erfüllt $\alpha\beta = id_A$.

„$\Leftarrow$" Seien $\beta, \gamma : B \to A$ mit $\alpha\beta = id_A$ und $\gamma\alpha = id_B$.

Nach (2.6) ist α dann injektiv und surjektiv auf B.

Zusatz: Wegen $\gamma\alpha = id_B$ gilt $B = \text{Bild}(\alpha)$.

Weiterhin ist

$$\beta = id_B \cdot \beta = (\gamma\alpha)\beta = \gamma(\alpha\beta) = \gamma\, id_A = \gamma.$$

Die Bedingungen $\alpha\beta = id_A$ und $\gamma\alpha = id_B$

liefern dann

$$\beta = \gamma = \{(b,a) \mid (a,b) \in \alpha\} = \alpha^{-1}. \quad //$$