Klopsch

Lineare Algebra I, WS 13/14

homepage: reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1314/

→ Anmeldung Übungen bis 20.10.13

Vorls (4st) Mo, Mi $10^{30} - 12^{15}$

Tut (2st) Mo $14^{30} - 16^{00}$ (25.21, HS 5F)

Üb 1-8 (2st) Mi / Do

Üb pkte: 40% bzw 30% ⇝ Zulassung Klausur

[⇝ Lin Alg II] 1. Blatt!

- Was ist lineare Algebra?

Lit: · Huppert, Willems
· Fischer

Antike Zahlentheorie, Geometrie, elem Algebra

~ 800 arabische Mathematik, „Schule von Bagdad"
⇝ $\boxed{\text{al-ǧabr}}$ (Rechenverfahren durch Ergänzen)
zB Gleichungen 1. und 2. Grades

[17 Jh Leibniz, Newton ⇝ Infinitesimalrech ⇝ Analysis]

18 Jh - 19 Jh Determinanten, Matrizen Gauß, Cauchy
Vektorraum Cayley, Grassmann
(analytische Geom)

20 Jh Grundlagenkrise, $\boxed{\text{Algebraisierung}}$

lin Alg: „einfachste" abstr Theorie → zB. Vektoranalysis, Diffgeom, Kodierungth, ...

Klopsch

Kapitel I: Grundbegriffe

§1 Mengen und Relationen

(1.1) Cantor (1845 - 1918)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, die Elemente genannt werden, zu einem Ganzen.

(1.2) Erläuterungen

a) (1.1) ist eine „Meta-Definition": es wird der Sprachgebrauch motiviert. Für uns ist jedes mathematische Objekt (formal) eine Menge. Eine Menge ist dadurch eindeutig bestimmt, welche Elemente sie enthält (→ Extensionalitätsaxiom).

b) Für eine Menge M ist daher stets klar (aber nicht offensichtlich!), ob ein beliebiges Objekt x Element der Menge ($x \in M$) oder nicht Element der Menge ($x \notin M$) ist.

Klopsch

c) Beim Formen neuer Mengen ist Vorsicht geboten!

<u>Russellsche Antinomie</u>:

„Die 'Menge' aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, ist keine Menge."

Formal korrekt ausgesprochen: Zu jeder Menge M gibt es eine Menge, die nicht Element von M ist, z.B.: $R(M) = \{ x \in M \mid x \notin x \}$. [Übung!]

[⇝ axiomatische Mengenlehre (z.B. Zermelo-Fraenkel)]

Idee: Angenommen, $M = \{ x \mid x \notin x \}$ ist eine Menge.

Ist $M \in M$, so folgt $M \notin M$ (W)

Ist $M \notin M$, so folgt $M \in M$ (W) „tertium non datur"

(1.3) <u>Beispiele</u>

a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der <u>natürlichen Zahlen</u>

$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \{1, 2, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ Menge der <u>ganzen Zahlen</u>

$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$ Menge der <u>rationalen Zahlen</u>

$\mathbb{R}$ Menge der <u>reellen Zahlen</u> [⇝ Analysis I]

Klopsch

b) $\{1,2,2,3\} = \{2,1,3\} = \{1,2,3\}$

(wohlunterscheidbar, Reihenfolge unerheblich)

c) $\emptyset$ <u>leere Menge</u>: enthält keine Elemente 1

[Zahlen sind formal auch Mengen, 2

z.B.: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$,

$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0,1\}$, ...]

d) $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11,13,\ldots\}$ Menge aller <u>Primzahlen</u>

<u>Erinnerung</u>: $p \in \mathbb{N}$ heißt <u>Primzahl</u>, falls

$p \neq 1$ und gilt: Ist $p = ab$ mit $a, b \in \mathbb{N}$,

so folgt $a \in \{1, p\}$.

(„Die einzigen Teiler von p sind 1 und p.")

(1.4) <u>Erläuterung</u>

Was ist ein Beweis? Welche Beweisarten gibt es?

- direkter Beweis (auch Kontraposition)
- indirekter Beweis / Widerspruchsbeweis
- Induktionsbeweis

Beweise muß man üben!

(1.5) <u>Satz</u> (Bspl direkter Bew)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bew (direkter Bew, Gauß-Anekdote)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{array}$$

Also gilt:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1),$$

dh

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad //$$

(1.6) Satz (Euklid ~300 v. Chr.; Bspl Widspr bew)

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bew (Widspr bew)

Angenommen, $\mathbb{P} = \{p_1, \dots, p_r\}$ ist endlich.

Betrachte $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r + 1 = \prod_{i=1}^{r} p_i + 1 \in \mathbb{N}$.

Wegen $\mathbb{P} \neq \emptyset$ gilt dann sicherlich $n > 1$.

[In Wahrheit wird das leere Produkt zweckmäßigerweise als 1 definiert, so daß die Beobachtung $\mathbb{P} \neq \emptyset$ unnötig ist.]

Wir verwenden nun folgenden Sachverhalt, den wir unten begründen:

(*) Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, so besitzt n einen Primteiler, dh es ex $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$ ($n = pm$ für geeignetes $m \in \mathbb{Z}$).

Klopsch

Sei also $n = pm$ für $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{Z}$, und ohne Einschränkung $p = p_1$. Dann gilt

$$p_1 m = pm = n = p_1 \cdot \prod_{i=2}^{r} p_i + 1 \quad , \quad \text{also}$$

$$\underbrace{p_1}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{\left(m - \prod_{i=2}^{r} p_i \right)}_{\in \mathbb{Z}} = 1 \;. \quad \text{W zu } p_1 > 1 \,.$$

zu (*) [eigentlich Induktionsbew, mehr dazu später]

Angenommen, die Aussage ist falsch. Dann ex ein kleinstes Gegenbeispiel $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$, welches keinen Primteiler besitzt. Offenbar ist dann $n \notin \mathbb{P}$, also $n = ab$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 < a, b < n$. Nach Wahl von n besitzt a einen Primteiler p. Wegen $n = ab$ ist p dann auch ein Primteiler von n. W

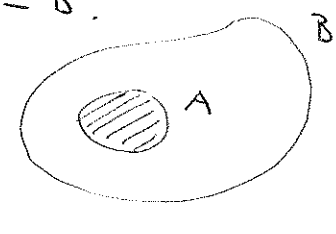
//

(1.7) Def (elem Mengenoperationen)

Seien A, B Mengen.

a) A heißt Teilmenge (auch Untermenge) von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Schreibe dafür $A \subseteq B$.

Bspe: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\emptyset \subseteq A$ für jedes A



Klopsch

<u>weitere Schreibweisen</u> (für den täglichen Gebrauch!):

$A \subsetneqq B$ („A echt enthalten in B") bedeutet:

$A \subseteq B$ und $A \neq B$, dh

$A \subseteq B$ und $\exists\, b \in B: b \notin A$

[$\exists$-Quantor: „es ex" ⇝ Analysis I]

$A \not\subseteq B$ („A nicht enthalten in B") bedeutet:

$\neg\,(A \subseteq B)$, dh $\exists\, a \in A: a \notin B$

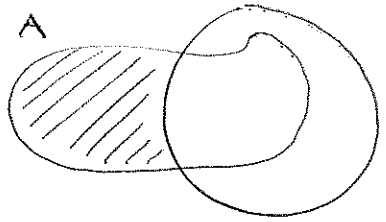
<u>Bem</u> $A = B$ ist gleichbedeutend mit:

$A \subseteq B$ und $A \supseteq B$, dh

$\forall a \in A: a \in B$ und $\forall b \in B: b \in A$.

b) Die <u>Differenz</u> von A und B ist die Menge

$A \setminus B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$.



c) Die <u>Potenzmenge</u> von A

ist die Menge aller Teilmengen von A, also

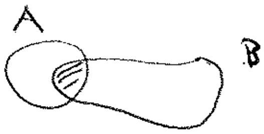
$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$. <u>Bem</u>: stets gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

d) Die <u>Vereinigung</u> von A und B ist die Menge

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$

Der <u>Schnitt</u> von A mit B ist die Menge

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$



d)' Allgemeiner betrachten wir für beliebige Mengen von Mengen

$\mathcal{A} = \{ A_i \mid i \in I \}$

die <u>Vereinigung</u>

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{ A_i \mid i \in I \} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$= \{ x \mid x \in A_i \text{ für \underline{mindestens ein} } i \in I \}$$

und, falls $\mathcal{A} \neq \emptyset$,

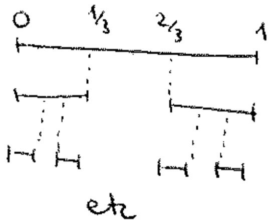
den <u>Schnitt</u>

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{ A_i \mid i \in I \} = \bigcap_{i \in I} A_i$$

$$= \{ x \mid x \in A_i \text{ für \underline{alle} } i \in I \}$$

(1.8) <u>Bspl.</u>:

zu b), d)': <u>Cantor-Menge</u>



$[0,1]$

$[0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$

...

$C_1 = [0,1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ Einheitsintervall,

$C_2 = [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ...

allgemein: $C_n = \underbrace{\frac{1}{3} C_{n-1}}_{\text{skalierte Kopie von } C_{n-1}} \cup \underbrace{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_{n-1} \right)}_{\text{verschobene skalierte Kopie von } C_{n-1}}$ für $n \geq 2$

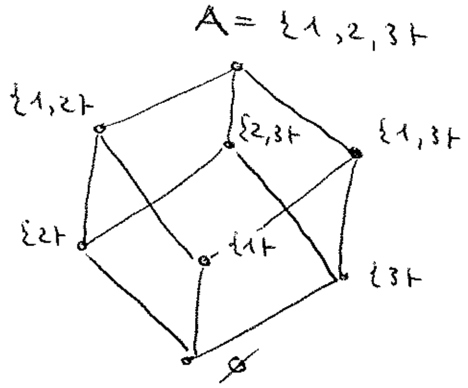
$C = \bigcap \{ C_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Klopsch

zu c): $A = \{1,2,3\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$

Hasse-Diagramm:



[Warum heißt die Potenzmenge Potenzmenge?

Tipp:

Für endliche Mengen A gilt: Die Anzahl der Teilmengen von A ist gleich ...]

⤳ Satz von Cantor: $|\mathcal{P}(A)| > |A|$ (sogar) für unendl. A

(1.9) Lemma (dh Hilfsaussage)

Sei M eine Menge, und seien $A, B, C \subseteq M$.

Dann gilt:

a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativges)

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Assoziativges)

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivges)

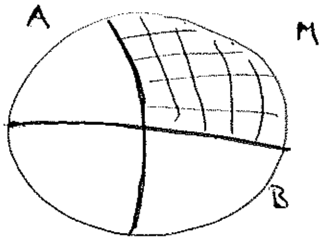
d) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$
$M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$ (de Morgansche Regeln)

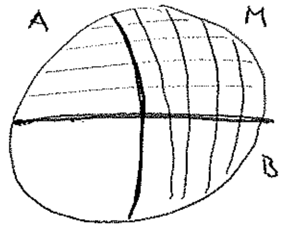
Klopsch

<u>Bew</u>: a), b), c) sind leichter zu beweisen als d): Übungsaufgabe (erst Bild malen, dann verbal formulieren!)

d) Wir beweisen zunächst

$$M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$





„$\subseteq$" Sei $x \in M \setminus (A \cup B)$. Dann folgt:

$x \in M$ und $x \notin A \cup B$, also $x \in M, x \notin A, x \notin B$, also $x \in M \setminus A$ und $x \in M \setminus B$, also $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$.

„$\supseteq$" Sei $x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$. Dann folgt:

$x \in M, x \notin A$ und $x \in M, x \notin B$, also $x \in M, x \notin A, x \notin B$, also $x \in M$ und $x \notin A \cup B$, also $x \in M \setminus (A \cup B)$.

Um die zweite Behauptung auf die erste zurückzuführen schreiben wir $\overline{C} = M \setminus C$ für $C \subseteq M$ und bemerken, daß $\underset{\underset{M \setminus \overline{C}}{\parallel}}{\overline{\overline{C}}} = C$ gilt.

Damit ergibt sich

Klopsch

$$M \setminus (A \cap B) = M \setminus ((M \setminus \bar{A}) \cap (M \setminus \bar{B}))$$

$$= M \setminus (M \setminus (\bar{A} \cup \bar{B})) \quad \text{[erste Beh]}$$

$$= \bar{A} \cup \bar{B} = (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

//

(1.10) Definition

a) Seien A, B Mengen. Das Cartesische Produkt von A, B ist

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}. \quad [\text{Descartes} \sim 1600]$$

~~[illegible]~~

(a,b) heißt geordnetes Paar und hat die Eigenschaft $(a,b) = (a',b')$ gdw $a = a'$ und $b = b'$

[mengentheoretisch kann man formal

$$(a,b) = \{\{a,b\},\{a\}\}$$ als Def verwenden, Übung!]

b) Für endlich viele Mengen $A_1, \dots, A_n$ bildet man entsprechend das Produkt

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\},$$

bestehend aus (geordneten) n-Tupeln $(a_1, \dots, a_n)$ mit der Eigenschaft

$(a_1, \dots, a_n) = (a_1', \dots, a_n')$ gdw $a_i = a_i'$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$.

Klopsch

[auch hier ist eine formale Def möglich,

naheliegend wäre etwa

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C \, ;$$

praktischer erweist sich die formale Def mit Hilfe von Abbildungen]

Für $A = A_1 = \ldots = A_n$ schreiben wir auch kürzer

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ Stück}}$$

c) Eine (binäre) <u>Relation</u> auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$.

(1.11) <u>Beispiele</u>

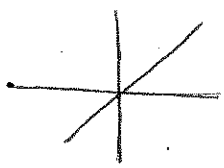
$$\mathbb{E}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

euklidische Ebene

[entsprechend: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ euklidischer 3-dim Raum]

Die Relation $\{ (a,a) \mid a \in \mathbb{R} \}$

beschreibt „=",



die Relation $\{ (a,b) \mid a \overset{\leq}{,} b \in \mathbb{R} \}$

beschreibt „≤".