Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Klausur Lineare Algebra I

Wintersemester 2013/2014

08.02.2014

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende Deckblatt, ggf. mit Unterschrift, Aufgabenblatt und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Eine injektive Abbildung von einer endlichen Menge X in sich ist stets eine Permutation von X.
☐	☐	Eine Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zwischen K-Vektorräumen heißt linear, falls $(av + bw)\varphi = (a\varphi)(v\varphi) + (b\varphi)(w\varphi)$ für alle $a, b \in K$ und $v, w \in V$.
☐	☐	Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $m \leq n$.
☐	☐	Der Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen besitzt Endomorphismen, die surjektiv aber nicht injektiv sind.
☐	☐	Ist A das Produkt zweier reeller $n \times n$ Matrizen mit negativen Determinanten, so hat A selbst eine positive Determinante.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) auf einem Extrablatt.

(b) Nennen Sie, ohne Beweis, die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für euklidische Vektorräume. Geben Sie dabei auch an, unter welchen Umständen statt der Ungleichung sogar die entsprechende Gleichung gilt.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ hat π höchstens n Fehlstände.

(ii) Sei $\alpha\colon V \to V$ ein Isomorphismus des Vektorraums V in sich. Dann ist jeder Eigenvektor von α auch ein Eigenvektor der Umkehrabbildung $\alpha^{-1}\colon V \to V$.

Aufgabe 2 (*12 Punkte*) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$(1,0,0)\varphi = (-1,1,-3), \quad (1,1,0)\varphi = (6,0,3), \quad (1,1,1)\varphi = (4,2,-3).$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis für $\operatorname{Kern}\varphi$ und für $\operatorname{Bild}\varphi$.

(b) Ist φ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ sei $U_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-tz = 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass U_t für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimmen Sie, für $t \in \mathbb{R}$, eine Basis von U_t und eine Ergänzung derselben zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie, für $s, t \in \mathbb{R}$, eine Basis von $U_s \cap U_t$.

Aufgabe 4 (*14 Punkte*) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\alpha\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x,y) \mapsto (x,y)A \qquad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q}).$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und lesen Sie die Eigenwerte von A ab.

(b) Berechnen Sie die Eigenräume des Endomorphismus α, indem Sie jeweils Basen für diese angeben.

(c) Entscheiden Sie, ob A über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie ggf. eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & t & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimmen Sie durch geeignete Zeilen- oder Spaltenumformungen den Rang der Matrix A_t in Abhängigkeit von t.

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_t in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\alpha\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Für $m \in \mathbb{N}$, bezeichne $\alpha^m\colon V \to V$ die m-fache Hintereinanderausführung von α. Weiter seien $U_m = \mathrm{Kern}(\alpha^m)$ und $W_m = \mathrm{Bild}(\alpha^m)$.

(a) Zeigen Sie: $\{0\} \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n$.

(b) Zeigen Sie weiter: $U_n = U_{n+1} = \ldots = U_{2n} = \ldots$.

(c) Folgern Sie: $V = U_n \oplus W_n$.

(d) Geben Sie für $K = \mathbb{F}_2$, $n = 3$ ein $\alpha\colon \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}_2^3$ an, für das $U_2 \cap W_2 \neq \{0\}$.