<u>Def 13.16</u> Seien V, W euklidische VR. Eine lineare Abb $f: V \to W$ heißt <u>orthogonal</u>, wenn $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$.

<u>Def 13.17</u> Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Eine lineare Abb. $f: V \to V$ heißt <u>selbstadjungiert</u>, wenn

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$$

für alle $v, w \in V$.

<u>Lemma 13.18</u> Seien v, w Eigenvektoren einer selbstadjungierten Abb $f: V \to V$ zu Eigenwerten $\lambda \neq \mu$, so gilt $\langle v, w \rangle = 0$

<u>Beweis</u> $\langle f(v), w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \lambda \langle v, w\rangle$

$= \langle v, f(w)\rangle = \langle v, \mu w\rangle =$

$= \mu \langle v, w\rangle$.

Also $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$. $\blacksquare$

Ist $(V, \langle -,-\rangle)$ ein euklidischer VR und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis, so ist die Abbildungsmatrix von $f: V \to V$ gegeben durch:

$$A = (\alpha_{ij}) \; , \; \alpha_{ij} = \langle v_i, f(v_j)\rangle .$$

Das folgt aus Lemma 13.12. Es gilt nämlich

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(v_j), v_i\rangle v_i$$

$$\underset{\substack{\text{Symmetrie} \\ \text{von } \langle -,-\rangle}}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle v_i, f(v_j)\rangle v_i$$

Korollar 13.19 Ist $v_1, \dots, v_n$ Orthonormalbasis von V, so ist $f: V \to V$ selbstadjungiert genau dann, wenn die Abbildungsmatrix A bezgl. $v_1, \dots, v_n$ symmetrisch ist, dh $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Beweis „$\Rightarrow$" Es gilt

$$\alpha_{ij} = \langle v_i, f(v_j) \rangle = \langle f(v_i), v_j \rangle$$

$$\underset{\text{Symmetrie}}{=} \langle v_j, f(v_i) \rangle$$

$$= \alpha_{ji}$$

„$\Leftarrow$" A symmetrisch, also

$$\alpha_{ij} = \langle v_i, f(v_j) \rangle = \alpha_{ji} = \langle v_j, f(v_i) \rangle$$
$$= \langle f(v_i), v_j \rangle$$

Also ist f selbstadjungiert auf Basiselementen. Also gilt

$$\begin{aligned} \langle f(v), w\rangle &= \langle f(\sum \beta_i v_i), \sum \gamma_j v_j\rangle \\ &= \sum\sum \beta_i \gamma_j \langle f(v_i), v_j\rangle \\ &= \sum\sum \beta_i\gamma_j \langle v_i, f(v_j)\rangle \\ &= \langle v, f(w)\rangle \end{aligned}$$ $\boxtimes$

<u>Propo 13.20</u> Jede selbstadjungierte lineare Abb. $f: V \to V$, $\dim(V) = n > 0$ hat einen Eigenvektor.

<u>Beweis</u> Gemäß Korollar 13.19 reicht es, die Aussage für symmetrische Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ zu beweisen! Wir wollen also zeigen, daß $\chi_A(T)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

Nach Fundamentalsatz der Algebra existiert komplexe Zahl $\lambda = \gamma + i\omega \in \mathbb{C}$ mit $\chi_A(\lambda) = 0$. Fasst man also die Matrix A also komplexe Matrix auf, d.h. $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, so existiert Vektor

$$0 \neq z = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad \text{mit}$$

$Az = \lambda z$. Also $A(x+iy) = (\gamma + i\omega)(x+iy)$,

d.h.

$$Ax = \gamma x - \omega y,$$
$$Ay = \gamma y + \omega x.$$

Nun gilt jedoch $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$,

also $\langle \gamma x - \omega y, y \rangle = \langle x, \gamma y + \omega x \rangle$.

Dies liefert:

$\gamma\langle x,y\rangle - \omega\langle y,y\rangle = \gamma\langle x,y\rangle + \omega\langle x,x\rangle$,

oder $\omega(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0$.

Da $x + iy = z \neq 0$, folgt $\omega = 0$.

Also gilt $\lambda = \gamma + i\omega = \gamma \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{q}}$

<u>Theorem 13.21</u> Ist $(V, \langle -,- \rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer VR und $f: V \to V$ selbstadjungiert. Dann gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren!

<u>Beweis</u> Per Induktion nach $n = \dim(V)$. Für $n=0$ trivial. Sei also $n \geq 1$. Nach Propo 13.20 gibt es einen Eigenvektor

und nach Induktionsvoraussetzung eine Orthonormalbasis $v_1, .., v_{n-1}$ aus Eigenvektoren für $g = f|_{\langle v \rangle^\perp} : \langle v \rangle^\perp \to \langle v \rangle^\perp$

Setze $v_n = \frac{v}{\|v\|}$. Dann ist $v_1, .., v_n$ die gesuchte Basis. $\boxtimes$

<u>Korollar 13.22</u> Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist A diagonalisierbar.