Def 13.7 Sei $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ein euklidische VR und $x, y \in V$, $x \neq 0, y \neq 0$. Man definiert den Winkel α zwischen x und y durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

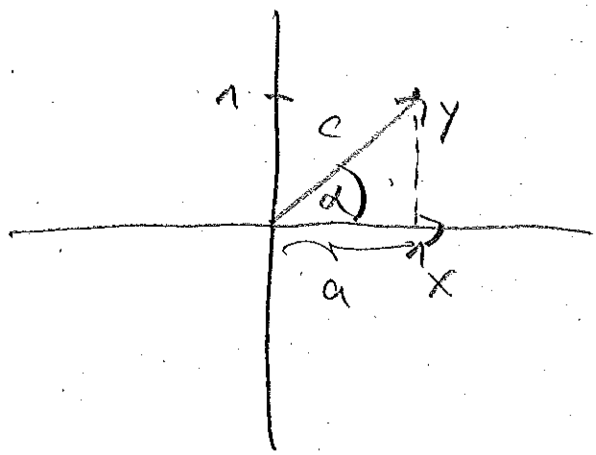
Wegen Cauchy-Schwarz gilt

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

Bsp 13.8 $V = \mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt. Sei $x = (1,0)$ und $y = (1,1)$. Dann gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

also $\alpha = 45°$.



Hier gilt $\frac{a}{c} = \cos(\alpha)$. Nun ist

$a = \|x\|$ und $c = \|y\|$, also $\cos(\alpha) = \frac{\|x\|}{\|y\|}$.

Da $\langle x, x \rangle = \langle x, y \rangle = \|x\|^2$, folgt

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

<u>Def 13.9</u> Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidischer VR und $x, y \in V$. Die Vektoren x und y heißen <u>orthogonal</u>, falls

$\langle x, y \rangle = 0$.

(In der Tat gilt dann für $x, y \neq 0$:

$\cos(\alpha) = 0$, also $\alpha = 90°$)

Def 13.10 Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidische VR. Eine Orthonormalbasis $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in I$

(ii) $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$.

Bsp. 13.11 Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt. Dann bilden $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis. Es gilt $\|e_i\| = 1$ und $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $i \neq j$.

Frage: Besitzt jede euklidische VR eine Orthonormalbasis?

Antwort: Ja! Wir werden das im folgenden zeigen.

Lemma 13.12 Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für jedes $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$$

Beweis Es gilt $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Dann folgt:

$$\langle v, v_i \rangle = \langle c_1 v_1, v_i \rangle + \dots + \langle c_n v_n, v_i \rangle$$

$$= \langle c_i v_i, v_i \rangle = c_i \langle v_i, v_i \rangle = c_i$$

$\boxtimes$

Lemma 13.13 Es seien $v_1, \dots, v_r$ Vektoren mit $\|v_i\| = 1$ und $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, $i \neq j$ in einem VR V mit $r \leq \dim(V)$.

Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Weise als Summe $v = u + w$ mit $u \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle = U$

$w \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle^{\perp} = \{ x \in V \mid \langle x, v_i \rangle = 0, \text{ für alle } i \}$

schreiben. Präziser:

$$u = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle v_i \quad \text{und} \quad w = v - u.$$

Beweis Dass sich v auf höchstens eine Weise als Summe $v = u + w$ schreiben lässt ergibt sich aus der positiven Definitheit. Denn aus $v = u + w = u' + w'$, mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in U^{\perp}$ folgt $(u - u') + (w - w') = 0$ und $\langle u - u', w - w' \rangle = 0$, also $\langle u - u', u - u' \rangle = 0$ und daher

$u - u' = 0$. Somit auch $w - w' = 0$.

Setze $u = c_1 v_1 + \dots + c_r v_r$.

Man rechnet nach, daß für die Koeffizienten c_i, für welche $w := v - u \in U^\perp$ gelten soll, folgendes gilt: $\langle v, v_i \rangle = c_i$.

Wenn nämlich $\langle w, v_i \rangle = 0$ für $i = 1, \dots, r$, so folgt

$$\langle v - u, v_i \rangle = \langle v, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle = 0$$

Also $\langle v, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle = c_i$.

□

Theorem 13.14 (Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren)

Sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig in V, so ist durch

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad \tilde{v}_{k+1} = \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i}{\| v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, \tilde{v}_i \rangle \tilde{v}_i \|}$$

ein System von Vektoren gegeben, für die $\|\tilde{v}_i\| = 1$ und $\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle = 0$, $i \neq j$. Außerdem sind $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u> Folgt aus Lemma 13.13. mit anschließender Normierung. Die lineare Unabhängigkeit rechnet man nach ∎

<u>Korollar 1.3.15</u> Jeder euklidische VR V mit $\dim(V) = n$ besitzt eine Orthonormalbasis.

<u>Beweis</u> Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ Basis. Wende Theorem 13.14 an. ∎