§13

Euklidische Vektorräume

<u>Def 13.1</u> Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein <u>Skalarprodukt</u> auf V ist eine Abb.

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) <u>Bilinearität</u>: Für jedes $x \in V$ sind die Abb.

$\langle -,x \rangle : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle v,x \rangle$ und

$\langle x,- \rangle : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle x,v \rangle$

linear.

2) <u>Symmetrie</u>: Es gilt $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$ für alle $x,y \in V$

3) <u>positive Definitheit</u>: Es gilt $\langle x,x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$.

<u>Def 13.2</u> Unter einem <u>euklidischen Vektorraum</u> versteht man ein Paar $(V, \langle -, - \rangle)$, bestehend aus einem $\mathbb{R}$-VR V und einem Skalarprodukt auf V.

<u>Bsp 13.3</u> <u>Standardskalarprodukt</u>:

$V = \mathbb{R}^n$ und dann ist

$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$(x, y) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$,

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Man rechnet nach, daß diese Abb. ein Skalarprodukt ist.

<u>Bsp 13.4</u> $V = \{ f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$.

Dann ist

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(f,g) \longmapsto \langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf V.

1) Bilinearität: $g(x)$ fest, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle f+h, g \rangle &= \int_{-1}^{1} (f+h)(x)\, g(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (f(x)+h(x))\, g(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \big(f(x)g(x) + h(x)g(x)\big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx + \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\, dx \\
&= \langle f,g \rangle + \langle h,g \rangle .
\end{aligned}$$

analog $\langle f, g+h \rangle = \langle f,g \rangle + \langle f,h \rangle$.

2) $$\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} g(x) f(x)\, dx = \langle g,f \rangle .$$

3) positive Definitheit: Aus ANA I folgt

$$\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f(x) f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx > 0,$$

falls $f \neq 0$.

Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer VR und $x \in V$. Die Zahl $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} \in \mathbb{R}$, $\|x\| \geq 0$ heißt Norm von $x \in V$.

Propo 13.5 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)
Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer VR. Dann gilt $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ für alle $x,y \in V$.

Beweis: Für $y=0$ ist die Aussage trivial. Es gilt dann

$$|\langle x,0\rangle| = |0| = 0 \leq \|x\| \cdot 0.$$

Sei nun $y \neq 0$. Setze

$$\eta := \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}.$$ Dann

Bilinearität

$$0 \leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle$$

$$= \|x\|^2 - 2\frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|y\|^2}$$

Also gilt $\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, dh

$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

$\blacksquare$

<u>Propo 13.6</u> Sei V ein euklidischer VR, so hat die Norm $\|-\|: V \to \mathbb{R}$, folgende Eigenschaften:

(i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x,y \in V$.

I nennt man Dreiecksungleichung.

Beweis (i) – (iii) ergeben sich direkt aus der Definition.

zu (iv): Es gilt

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

☒