Sei $A \in Mat_n(K)$ und betrachte Basiswechsel diagram: $B = \{e_1, \dots, e_n\}$,

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "D"] \arrow[d, "T_B^{B'}"'] & K^n \arrow[d, "T_B^{B'}"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^n \end{tikzcd}$$

Dann gilt $D = \left(T_A^{A'}\right)^{-1} A \, T_A^{A'}$. Wir suchen eine Basis $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren. Dann ist D von der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei λ_i nicht notwendigerweise verschieden. Die Matrix $T_B^{B'}$ ist

von der Gestalt

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ wobei}$$

$$v_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir also die Eigenvektoren kennen, können wir auch die Basiswechselmatrix $T_B^{B'}$ angeben.

<u>Bestimmung einer Basis von E_λ:</u>

Sei λ ein Eigenwert von $f: V \to V$, $\dim(V) = n$. Wähle Basis $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und betrachte $M_A(f) - \lambda \cdot E$:

Basis von $\operatorname{Ker}(M_A(f) - \lambda \cdot E)$ ermittelt man mit Gauß-Algorithmus.

Bsp 12.15

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Wir fassen $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als lineare Abb auf, Basis ist $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$.

1) $\chi_A(T) = (2-\lambda)^2(-\lambda) = -\lambda\,(2-\lambda)^2$.

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

2) $\lambda_1 = 0$: $\quad A - 0 \cdot E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \middle| \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$\lambda_2 = 2$: $\quad A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\operatorname{Ker}(A-2E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_3, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

3) Wir sehen, daß A diagonalisierbar ist. $A' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis aus Eigenvektoren. Somit

$$T_A^{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Wir rechnen nach:

$$\left(T_A^{A'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$