Bsp 12.11 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, aufgefasst als lineare Abb. $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis e_1, e_2, e_3.

1) $$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 0 & 2-T & 3 \\ 5 & 0 & 4-T \end{pmatrix}$$
$$= (3-T)(2-T)(4-T)$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$.

2) Betrachte

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3 & 3 \\ 5 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A - \lambda_1 E) = 2$, also $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ Dann

gilt $\operatorname{rank}(A - \lambda_2 E) = 2$, also $\dim E_{\lambda_2} = 1$.

analog für E_{λ_3}.

3) Es gilt $\sum_{i=1}^{3} \dim E_{\lambda_i} = 3$. Also ist A diagonalisierbar.

Ganz allgemein gilt:

<u>Propo 12.12</u> Sei $f: V \to V$ linear mit $\dim(V) = n$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte. Dann ist f diagonalisierbar.

<u>Beweis</u> Da $\det(f - \lambda_i \, id) = 0$ gilt $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$. Wir wissen

$$\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} \leq n. \text{ Also}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} = n.$$

$\boxtimes$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Diagonalisierbarkeit und charakteristischem Polynom?

Nehmen wir an $\chi_f(T)$ hat keine Nullstelle in K. Dann gibt es keinen Eigenwert, keinen Eigenvektor und somit ist f nicht diagonalisierbar.

Nehmen wir an $\chi_f(T) = (\lambda_1 - T)^{m_1} \cdots (\lambda_r - T)^{m_r}$.
Dann sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte.
Die Zahlen $m_1, \ldots, m_r$ nennt man algebraische Vielfachheiten der λ_i.
Es gilt nun folgender Zusammenhang.

Propo 12.13 Sei $f: V \to V$ linear mit $\dim(V) = n$. Sei

$$\chi_f(T) = (\lambda_1 - T)^{m_1} \cdots (\lambda_r - T)^{m_r}.$$

Dann gilt $m_i \geq \dim E_{\lambda_i}$. Ist $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ für $i = 1, \dots, r$, so ist f diagonalisierbar.

Beweis Sei $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von E_{λ_i}, so hat Abb.-matrix von f bzgl. diese Basis die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \begin{matrix}\lambda_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i\end{matrix} & * \\ \hline & 0 & * \end{array}\right)$$

Deshalb kommt in der

Linearfaktorzerlegung von $\chi_f(T)$ der Faktor $(\lambda_i - T)$ mindestens $\dim E_{\lambda_i}$ mal vor. Da $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$ folgt im Falle $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ gerade $\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = n$. Also wäre f diagonalisierbar. ☒

Es kann sein, daß eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ über K nicht diagonalisierbar ist, über einen Erweiterungskörper $K \subset L$ jedoch schon!

<u>Bsp 12.14</u> Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.

Dann gilt $\chi_A(T) = (1-T)(T^2+1)$.

In $\mathbb{R}$ hat $\chi_A(T)$ nur die Nullstelle

$\lambda = 1$. Es gilt

$$A - 1E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \text{ also}$$

$\operatorname{rank}(A - E) = 2$, d.h. $\dim E_\lambda = 1 \neq 3$.

Also ist A über $\mathbb{R}$ <u>nicht</u> diagonalisierbar.

Betrachten wir $A \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{C})$, so ist

$$\chi_A(T) = (1 - T)(T + i)(T - i)$$
$$= (1 - T)(-i - T)(i - T) \,,$$

also sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ die 3 Eigenwerte. Nach Propo. 12.12 ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar!

Wir wollen den Zusammenhang zum Basiswechsel verstehen.