<u>Lemma 12.6</u> Sind $v_1, \dots, v_r$ Eigenvektoren von f zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, so sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u> Induktion nach r.
Für $r=1$ ist v_1 linear unabhängig, da $v_1 \neq 0$ nach Voraussetzung.
Nehmen an, die Aussage stimmt für $r=k$.
Seien $v_1, \dots, v_{k+1}$ Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und sei

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0.$$

Dann ist

$$(*) \quad \alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0.$$

Anwendung von f liefert:

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_{n+1} f(v_{n+1}) = 0, \text{ also}$$

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \qquad (**)$$

Subtrahiert man $(*)$ von $(**)$ so erhält man

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) v_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) v_n = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = \dots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0.$$

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_j$, folgt

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0,$$

also auch $\alpha_{n+1} = 0$. ∎

<u>Bemerkung 12.7</u> Lemma 12.6 zeigt auch folgendes: Es gibt nur endlich viele verschiedene Eigenwerte zu $f: V \to V$, wenn $\dim(V) = n$.

Gäbe es nämlich unendlich viele verschiedene Eigenwerte, so gäbe es eine Folge $v_1, v_2, \dots, \dots$ von linear unabhängigen Vektoren. Dann aber $\dim(V) = \infty$.

<u>Propo 12.8</u> Sei $\dim(V) = n$ und $f: V \to V$ linear. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte und $n_1, \dots, n_r$ deren geometrische Vielfachheiten.

Sei ferner $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ eine Basis von E_{λ_i}. Dann sind

$$v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{n_2}^{(2)}, \dots, v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)}$$

linear unabhängig. Insbesondere ist $\sum_{i=1}^{r} n_i \leq n$. f ist diagonalisierbar genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

<u>Beweis</u> Sei

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} v_k^{(i)} = 0 \quad ,$$

so sind nach Lemma 12.6 gerade

$$\sum_{k=1}^{n_i} \alpha_k^{(i)} v_k^{(i)} = 0$$

und weil $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ linear unabhängig, gilt $\alpha_1^{(i)} = \dots = \alpha_{n_i}^{(i)} = 0$.

Durch Aneinanderreihung von Basen der Eigenräume E_{λ_i} entsteht so ein linear unabhängiges $(n_1 + \dots + n_r)$-tupel von Eigenvektoren. Falls $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$,

erhalten wir aus Dimensionsgründen eine Basis aus Eigenvektoren.

Ist nun umgekehrt f diagonalisierbar und seien m_i die Anzahl der Eigenvektoren zu λ_i, so ist offenbar $m_i \leq n_i$. Daher gilt

$$n = \sum_{i=1}^{r} m_i \leq \sum_{i=1}^{r} n_i \leq n .$$

Also $m_i = n_i$.

$\boxtimes$

wir sehen, wie wir vorgehen müsste, um eine Basis von Eigenvektoren zu finden.

<u>1. Schritt</u> Man sucht alle $\lambda \in K$, für die $\mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq 0$, oder äquivalent dazu, für die $\det(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \neq 0$.

<u>2. Schritt</u> Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ alle Eigenwerte. Dann bestimme man eine Basis $v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}$ von E_{λ_i}.

<u>3. Schritt</u> Die Aneinanderreihung dieser Basen ist die gesuchte Basis aus Eigenvektoren.

Hierbei stellen sich zwei praktische Probleme.

1.) Wie berechnet man alle Eigenwerte?

2) Wie berechnet man eine Basis von E_λ, wenn λ Eigenwert.

zu 1): Die Suche nach den Eigenwerten lässt sich zurückführen auf die Suche nach den Nullstellen der Abb. $K \to K$,

$$\alpha \longmapsto \det(f - \alpha \cdot id).$$

Wir werden sehen, daß diese Abb durch ein Polynom beschrieben wird.

Sei also $f: V \to V$ linear und $A = \{a_1, .., a_n\}$ eine Basis von V.

Sei nun T eine Unbestimmte, so definieren wir

$$\chi_f(T) = \det(M_A(f) - T \cdot E)$$
$$= \det \begin{pmatrix} \alpha_{11}-T & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-T & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & & \alpha_{nn}-T \end{pmatrix}$$

<u>Bsp 12.9</u> $M_A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dann

$$\chi_f(T) = \det \begin{pmatrix} 1-T & 2 & 0 \\ 0 & 1-T & 3 \\ 2 & 1 & 1-T \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^3(T-1)^3 + 3(T-1) + 12.$$

Wir sehen, $\chi_f(T)$ ist ein Polynom in T.

Dies ist kein Zufall!

Wir schauen uns $\chi_f(T)$ an.

Mit Leibnizscher Formel für die Determinante ergibt sich

$$\chi_f(T) = (\alpha_{11} - T) \cdots (\alpha_{nn} - T) + Q,$$

wobei der erste Summand zu $\sigma = id \in S_n$ gehört und Q die restliche Summe über $S_n \setminus \{id\}$ ist. Da in einem Summanden von Q als Faktoren höchstens $n-2$ Diagonalkomponenten auftreten können, ist Q ein Polynom vom Grad $\leq n-2$.

Da formal gesehen

$$(f - T \cdot id)(a_i) = f(a_i) - T a_i =$$

$$= \alpha_{11} a_1 + \ldots + (\alpha_{i1} - T \cdot 1) \cdot a_i + \ldots + \alpha_{n1} a_n$$

ist $M_A(f) - TE$ die Abbildungsmatrix

zu $f - T \cdot \mathrm{id}$. Aus Lemma 11.13 folgt, daß für andere Basis $A' = \{a_1', \ldots, a_n'\}$ folgendes gilt:

$$\det(M_A(f) - T \cdot E) = \det(M_{A'}(f) - T E).$$

Das rechtfertigt folgende Definition.

<u>Def 12.10</u> Sei $f : V \to V$ linear mit $\dim(V) = n$. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Basis von V. Dann heißt

$$\chi_f(T) = \det(M_A(f) - T E)$$

das <u>charakteristische Polynom von f</u>.

Es gilt: $\deg(\chi_f(T)) = n$.

Man sieht, daß die Nullstellen von $\chi_f(T)$ die Eigenwerte von f sind.

Bevor wir zu 2), die Berechnung einer Basis von E_λ, kommen, werden wir an einem Beispiel erklären, wie man entscheidet, ob f diagonalisierbar ist.

Hier ist zunächst das Rezept:

1) $\chi_f(T)$ bestimmen und die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ berechnen.

2) $\dim E_{\lambda_i}$ mit Gauß-Algorithmus bestimmen.

3) Falls $\sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = n$, so ist f diagonalisierbar.