Kommen wir nun zurück zur Tatsache, daß $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$ invertierbar ist, genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.

Bsp. 11.4 zeigt $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Also $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$.

Das gilt ganz allgemein:

<u>Propo 11.10</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.

<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" Sei A invertierbar. Dann ist $\mathrm{rank}(A) = n$. Durch Zeilenoperationen kann A in E umgewandelt werden. Aus $\det(E) = 1 \neq 0$ und Lemma 11.2 folgt $\det(A) \neq 0$.

„$\Leftarrow$" Angenommen A nicht invertierbar. Dann folgt $\operatorname{rank}(A) < n$. Also $\det(A) = 0$.

Propo 11.11 $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$. Dann gilt
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Beweis Wir halten B fest und betrachten die Abb.

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Mat}_n(K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \det(A \cdot B) \end{aligned}$$

Dann ist f linear in den Zeilen von A. Denn wenn man i-te Zeile von A ändert, so ändert das nur die i-te Zeile von AB.

Bei festgehaltenen übrigen Zeilen und

festgehaltenem B ist also

$$K^n \to K^n$$

$$\begin{pmatrix} i\text{-te Zeile} \\ \text{von } A \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i\text{-te Zeile} \\ \text{von } AB \end{pmatrix}$$

linear. Ist nun $\mathrm{rank}(A) < n$, so auch $\mathrm{rank}(AB) < n$, da $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$.

Also $\det(AB) = 0 = 0 \cdot \det(B)$

$= \det(A) \cdot \det(B)$.

Es gilt $f(E) = \det(EB) = \det(B)$. Falls $\det(B) \neq 0$, so hat die Abb

$$A \mapsto (\det(B))^{-1} \det(AB)$$

die Eigenschaften (i), (ii), (iii) aus Propo. 11.1. Also $(\det(B))^{-1} \det(AB) = \det(A)$.

Falls $\det(B) = 0$, so ist mit Propo 11.10 B nicht invertierbar, also $\mathrm{rank}(B) < n$.

Also $\dim \operatorname{Ker}(B) > 0$. Daraus folgt $\dim \operatorname{Ker}(AB) > 0$, da $\operatorname{Ker}(B) \subset \operatorname{Ker}(AB)$.

Also $\operatorname{rank}(AB) < n$. Deshalb

$$\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot 0 = \det(A) \cdot \det(B)$$

$\square$

<u>Korollar 11.12</u> $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar, so gilt

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

<u>Beweis</u> $\det(AA^{-1}) = \det(E) = 1$,

also $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$, d.h.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\square$

Sei nun $f : V \to V$ linear und $\dim(V) = n$.

Betrachte folgendes Diagramm: $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ Basis von V

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "can"'] & V \arrow[d, "can"] \\ K^n \arrow[r, "M_A(f)"] & K^n \end{tikzcd}$$

$M_A(f)$ ist Abbildungsmatrix von f bezgl. der Basis $a_1, \dots, a_n \in V$.

<u>Lemma 11.13</u> Ist $f : V \to V$ linear und $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $A' = \{a_1', \dots, a_n'\}$ Basen von V. Dann gilt

$$\det(M_A(f)) = \det(M_{A'}(f))$$

<u>Beweis</u> Wir erinnern an die Basiswechselmatrix. Haben folgendes Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
V_A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & V_A \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
K^n \arrow[r, "M_A(f)"] \arrow[d, "T^A_{A'}"'] & K^n \arrow[d, "T^A_{A'}"] \\
K^n \arrow[r, "M_{A'}(f)"] & K^n \\
V_{A'} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\mathrm{can}"] & V_{A'} \arrow[u, "\mathrm{can}"']
\end{tikzcd}
$$

Wir wissen, daß $M_A(f) = \left(T^A_{A'}\right)^{-1} \cdot M_{A'}(f) \cdot T^A_{A'}$,

mit Propo. 11.11 folgt

$$\det(M_A(f)) = \left(\det(T^A_{A'})\right)^{-1} \det(M_{A'}(f)) \det(T^A_{A'})$$
$$= \det(M_{A'}(f))$$

$\blacksquare$

Def 11.14 Sei $f: V \to V$ linear und $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis von V. Dann

$$\det(f) := \det(M_A(f)).$$

Wir kommen nun zu einem interessanten Problem. Frage: Könnte man aus einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die „Wurzel" ziehen?

Nehmen wir an $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt $B = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

die Bedingung $B^2 = A$. Also hätte A eine „Wurzel".

Was macht man, wenn $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ beliebig?

<u>Idee:</u> Gäbe es invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, so daß

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D ,$$

So könnte man mit $\sqrt{D} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

folgendes erreichen.

$$\begin{aligned}(T\sqrt{D}T^{-1})^2 &= T\sqrt{D}T^{-1}T\sqrt{D}T^{-1} \\ &= T\sqrt{D}\sqrt{D}T^{-1} = TDT^{-1} = A\end{aligned}$$

Setzen wir also $B = T\sqrt{D}T^{-1}$, so gilt $B^2 = A$. Es stellt sich also die Frage, wann es solche T gibt?

//

Das führt auf den Begriff der Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in Mat_n(K)$.

§12

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

<u>Def 12.1</u> Eine Matrix $A \in Mat_n(K)$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, wenn sie zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ähnlich ist.

<u>Lemma 12.2</u> Ist A die Abbildungsmatrix von $f: V \to V$ bezüglich einer Basis

$v_1, \dots, v_n \in V$, so hat A

die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $f(v_i) = \lambda_i v_i$,

für $i = 1, \dots, n$.

<u>Beweis</u> Betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \text{can} \downarrow & & \downarrow \text{can} \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n \end{array}$$

„$\Leftarrow$" Sei $f(v_i) = \lambda_i v_i$, dann hat A die Gestalt $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

„$\Rightarrow$" Sei nun $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dann

gilt

$$
\begin{aligned}
f(v_i) &= can^{-1}(A \cdot can(v_i)) \\
&= can^{-1}(A \cdot e_i) \\
&= can^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i \cdot can^{-1}(e_i) \\
&= \lambda_i v_i
\end{aligned}
$$

☒

Dies führt auf folgende Definition:

<u>Def 12.3</u> Sei V ein K-VR und $f: V \to V$ linear. Unter einem Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$ versteht man einen Vektor $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$.

<u>Lemma 12.4</u> Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ist genau dann Eigenvektor von $f: V \to V$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$.

<u>Beweis</u> $f(v) = \lambda v$ bedeutet

$f(v) - \lambda v = 0$ und wegen der

Linearität gilt

$f(v) - \lambda v = (f - \lambda \mathrm{id})(v)$.

Also ist $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$.

$\boxtimes$

<u>Def 12.5</u> Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f: V \to V$, so heißt

$E_\lambda := \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id})$

<u>Eigenraum von f zu λ</u>.

Die Zahl $\dim E_\lambda$ heißt

<u>geometrische Vielfachheit</u>.