nämlich $\operatorname{sign}(\mathrm{id})\, a_{11} \cdots a_{nn}$ und $a_{ii} = 1$.

Also $\det(E) = 1$. Es bleibt zu zeigen, daß (ii) gilt. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$ verschwindet,

sobald A zwei gleiche Zeilen hat. Seien also r-te und s-te Zeile gleich und $\sigma \in S_n$ die Permutation welche nur $r, s \in \{1, \dots, n\}$ vertauschen. Sei nun A_n die Menge der geraden Permutationen, so gilt

$$\sum_{\gamma \in S_n} \operatorname{sgn}(\gamma)\, a_{1\gamma(1)} \cdots a_{n\gamma(n)} =$$

$$\sum_{\tau \in A_n} \left(\operatorname{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} + \operatorname{sign}(\tau \circ \sigma)\, a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)} \right)$$

Nun geht $a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$ aus

$a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}$ dadurch hervor, daß man den r-ten Faktor $\alpha_{r\tau(r)}$ durch $\alpha_{r\tau(s)}$ und $\alpha_{s\tau(s)}$ durch $\alpha_{s\tau(r)}$ ersetzt.

Wegen der Gleichheit der s-ten und r-ten Zeile ändert das nichts und die Beh. folgt aus $\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) = -\operatorname{sign}(\tau)$. $\square$

<u>Bsp 11.4</u> $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} \overset{\alpha_{11}}{a} & \overset{\alpha_{12}}{b} \\ \underset{\alpha_{21}}{c} & \underset{\alpha_{22}}{d} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \operatorname{sign}(\sigma)\,\alpha_{1\sigma(1)}\cdot\alpha_{2\sigma(2)} + \operatorname{sign}(\tau)\,\alpha_{1\tau(1)}\cdot\alpha_{2\tau(2)}$$

$$= ad - bc$$

$n=3$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, dann

gilt mit Leibnizscher Formel:

$$\det(A) = (aek + bfg + cdh) - (gec + hfa + kdb)$$

<u>Merkregel:</u> (Sarrus'sche Regel)

$$+ \quad \begin{array}{cccccc} & + & + & - & - & - \\ a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & k & g & h & k \end{array}$$

Für $n \geq 4$ gibt es keine so einfache Regeln, wie für $n = 2, 3$.

Sehr nützlich ist jedoch

<u>Propo 11.5</u> Für <u>obere Dreiecksmatrizen</u>

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A \quad \text{gilt}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

<u>Beweis</u> Schreiben $A = (\alpha_{ij})$ und betrachten

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Das Produkt $\alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}$ verschwindet, es sei denn $\sigma(i) \geq i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Das gilt nur für $\sigma = \mathrm{id}$. Also

$$\det(A) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \cdot \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i. \qquad \boxtimes$$

Man kann mit Hilfe von Lemma 11.2 und Propo. 11.5 ebenfalls Determinanten ausrechnen!

<u>Bsp 11.6</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-4) \\ \\ \mathrm{I} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-9) \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \mathrm{III} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Lemma 11.2 ändern Schritte I, II und III an der Determinante von A nichts.

Also $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$

Propo. 11.5

Wir wollen eine weitere Formel zur Berechnung der Determinante einer Matrix kennenlernen.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ eine Matrix, so bezeichne A_{ij} die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehende $(n-1)\times(n-1)$ Matrix.

<u>Bsp 11.7</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, dann

ist $A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

<u>Propo 11.8</u> Sei $A=(\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann gilt

① $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

② $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}$$

Diese Formeln heißen <u>Laplace-Entwicklung</u> von det nach i-ter Zeile bzw. j-ter Spalte.

<u>Beweis</u> Wir zeigen nur ①. ② geht genauso.

Wir müssen zeigen, daß die rechte Seite von ① die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) hat. Beweis per Induktion nach n.

(i): Um Linearität in der k-ten Zeile von A nachzuweisen, zeigen wir, daß jeder einzelne Summand $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det A_{ij}$ linear in der k-ten Zeile ist.

Für $k \neq i$ folgt, daß

$$\det : \mathrm{Mat}_{(n-1)}(K) \to K$$

linear in den Zeilen ist, während α_{ij} von der k-ten Zeile nicht abhängt.

Für $k = i$ hängt A_{ij} von der i-ten Zeile nicht ab (wird weggelassen). Aber nun ist die Abb. $A \mapsto \alpha_{ij}$ linear in der i-ten Zeile.

Also hat det die Eigenschaft (i).

(iii): Wir berechnen $\det(E)$:

$$\det(E) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\alpha_{ij}\det E_{ij}$$

In der Summe auf der rechten Seite tritt nur ein einziger von Null verschiedener Summand auf, nämlich $(-1)^{j+j} \alpha_{jj} \det E_{jj}$. Da $E_{jj} = E_{(n-1)}$ die Einheitsmatrix $E_{(n-1)} \in Mat_{(n-1)}(K)$ ist folgt nach Induktionsvoraussetzung $\det E_{jj} = 1$. Also folgt $\det E = 1$.

(ii): Sei nun $\operatorname{rank}(A) < n$. Dann gibt es eine Zeile, die aus den anderen linearkombiniert werden kann. Daraus folgt, daß man durch Zeilenoper. vom Typ II diese Zeile zu Null machen kann. Eine Matrix mit einer Null-Zeile hat Determinante Null.

Wir müssen zeigen, daß Zeilenop. vom Typ II das Ergebnis der Formel für det nicht ändert.

Wegen der bereits gezeigten Linearität, reicht es zu zeigen, daß die Determinante jeder Matrix verschwindet, welche zwei gleiche Zeilen hat.

Nehmen wir an die r-te und s-te Zeile von A sind gleich. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{r+j} \alpha_{rj} \det A_{rj} + (-1)^{s+j} \alpha_{sj} \det A_{sj},$$

da alle anderen Summanden verschwinden. (die betreffenden A_{ij} haben zwei gleiche Zeilen)

200

Man sieht leicht, daß man

A_{rj} durch $|r-s|-1$ Zeilen ~~Spalten~~

vertauschungen in A_{sj} umgewandelt werden.

Da nach Induktionsannahme Zeilen-

vertauschungen bei $(n-1)\times(n-1)$ Matrizen

zum Vorzeichenwechsel der Determinante

führen folgt:

$$\det(A) = (-1)^{r+j}\alpha_{rj}\det A_{rj} + (-1)^{s+j}\alpha_{sj}\det A_{sj}$$

$$\underset{\alpha_{rj}=\alpha_{sj}}{\overset{!}{=}} (-1)^{r+j}\alpha_{rj}\det A_{rj} +$$

$$(-1)^{s+j}\alpha_{rj}\,(-1)^{r-s+1}\det A_{rj}$$

$$= \big(\underbrace{(-1)^{r+j} + (-1)^{r+j+1}}_{=0}\big)\alpha_{rj}\det A_{rj} = 0$$

☐

201

Bsp 11.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ aus Bsp 11.6.

Sei $j = 1$. Dann folgt aus Laplace-Entwicklung

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \alpha_{i1} \det A_{i1}$$

$$= (-1)^{1+1} \alpha_{11} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \alpha_{21} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \alpha_{31} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 9 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp. 11.4

$$= (2-3) - 4(1-3) + 9 \cdot (1-2)$$

$$= -1 + 8 - 9 = -2$$