zu (ii): Sei $a \sim b$, also $b-a \in U$. Dann gilt auch $\lambda(b-a) \in U$ für alle $\lambda \in K$. Insbesondere für $\lambda = -1$. Also $a-b \in U$, d.h. $b \sim a$.

zu (iii): Seien $a \sim b$ und $b \sim c$, d.h. $b-a \in U$ und $c-b \in U$. Dann gilt $(c-b)+(b-a) = c-a \in U$, also $a \sim c$.

Die Äquivalenzklassen sind

$$[a] = \{x \in V \mid x-a \in U\}$$
$$= \{x \in V \mid x = a+r \text{ für } r \in U\}$$
$$= a + U$$

Wir schreiben nun

$$V/U := \{a+U \mid a \in V\}$$

Definieren auf V/U Vektoraddition und Skalarmultiplikation durch:

$[a] + [b] = [a+b]$ und $\lambda[a] = [\lambda a]$.

Die Verknüpfungen sind wohldefiniert; dh hängen nicht von der Wahl der Repräsentanten ab. Seien $a \in [a]$, $b \in [b]$ und wähle $a' \in [a]$, $b' \in [b]$ so gilt

$$a'+b' - (a+b) = (a'-a) + (b'-b) \in U,$$

dh $[a+b] = [a'+b']$. Weiter gilt

$$\lambda \cdot a' - \lambda \cdot a = \lambda(a-a') \in U.$$

Man rechnet jetzt nach, daß V/U ein K-VR ist. Man hat kanonische Abb.

$$\pi : V \to V/U, \quad a \mapsto a+U,$$

welche linear ist. Man sieht

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \pi &= \{x \in V \mid x+U = U\} \\ &= \{x \in V \mid x \in U\} = U. \end{aligned}$$

Der K-VR V/U heißt Quotienten-vektorraum.

§11
Determinanten

Haben auf Übungsblatt 10 gesehen, daß aus $ad - bc \neq 0$, $a,b,c,d \in K$ folgt: Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(K)$ ist invertierbar. Man kann auch zeigen, daß aus der Invertierbarkeit von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auch $ad - bc \neq 0$ folgt. Wie ist das zu verstehen? Das verstehen wir mit Hilfe des Begriffs der Determinante.

<u>Propo 11.1</u> Sei $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ eine Abb. mit den folgenden Eigenschaften:

(i) det ist linear in jeder Zeile

(ii) Ist $\mathrm{rank}(A) < n$, so ist $\det(A) = 0$

(iii) $\det(E) = 1$.

Dann ist die Abb. $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ eindeutig. Man nennt diese Abb. Determinante und die Zahl $\det(A) \in K$ die Determinante von A.

Um obige Proposition zu beweisen, benötigen wir folgendes

Lemma M.2 Sei $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ eine Abb mit Eigenschaften (i) und (ii). Dann gilt:

① $\det(A) = -\det(E_s^r \cdot A)$

② $\det(E_r(\lambda) \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$

③ $\det(A) = \det(E_s^r(\lambda) \cdot A)$

Beweis ② folgt direkt aus der Linearität von det in den Zeilen.

3: Zunächst bilden wir aus A die Matrix A'', in dem wir das Vielfache der r-ten Zeile nicht zur s-ten Zeile addieren, sondern indem wir die s-te Zeile durch das Vielfache der r-ten ersetzen. Dann sind die Zeilen in A'' linear abhängig und es gilt $\operatorname{rank}(A'') < n$, also $\det(A'') = 0$. Aus der Linearität folgt dann $\det(E_s^r(\lambda)A) =$
$\det(A) + \det(A'') = \det(A)$.

1: Seien die r-te und s-te die beiden zu vertauschenden Zeilen. Nach 3 gilt $\det(A) = \det(E_s^r(1) \cdot A)$
Ebenfalls nach 3 gilt

$$\det(E^r_s(1)\cdot E^r_s\cdot A) = \det(E^r_s\cdot A).$$

Die Matrizen $E^r_s(1)\cdot A$ und $E^r_s(1)\cdot E^r_s\cdot A$ unterscheiden sich dann nur in der r-ten Zeile. In der s-ten Zeile steht bei beiden die Summe der r-ten und s-ten Zeile. Wegen der Linearität in der s-ten Zeile ist dann

$$\det(E^r_s(1)\cdot A) + \det(E^r_s(1)\cdot E^r_s\cdot A)$$

gleich der Determinante einer Matrix, welche in der s-ten und r-ten Zeile jeweils die Summe aus r-ter und s-ter Zeilen stehen hat.

Also

$$\det(E^r_s(1) A) + \det(E^r_s(1) E^r_s\cdot A) = 0,$$

folglich

$\det(A) + \det(E_s^r \cdot A) = 0$ ∎

<u>Beweis von 10.1</u>

Seien det und det' zwei Abb. mit Eigenschaften (i), (ii), (iii). Sei B eine Matrix, welche aus A durch Zeilenoperationen hervorgeht, so folgt $\det(A) = \det'(A) \Leftrightarrow \det(B) = \det'(B)$.

Angenommen $\operatorname{rank}(A) < n$, dann gilt trivialerweise $\det(A) = 0 = \det'(A)$.
Sei also $\operatorname{rank}(A) = n$. Dann kann man A durch Zeilenoperationen in Einheitsmatrix E verwandelt werden.
Aus $\det(E) = \det'(E) = 1$ folgt dann unmittelbar $\det(A) = \det'(A)$ ∎

Wir haben also gesehen: Falls $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ existiert, so ist die Abb. eindeutig.

Frage: existiert so eine Abb?

<u>Propo 11.3</u> Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}.$$

Dann erfüllt det die Eigenschaften (i), (ii), (iii).

Die obige Formel für det heißt <u>Leibnitsche Formel</u>.

<u>Beweis</u> (i): Die Linearität in den Zeilen hat offensichtlich jeder der $n!$ Summanden, also auch die Summe.

(iii): Ist $A = E$, so ist nur ein Summand von Null verschieden, nämlich $\mathrm{sign}(\mathrm{id})\, a_{11} \cdots a_{nn}$ mit $a_{ii} = 1$.

Also $\det(E) = 1$. Es bleibt zu zeigen, daß (ii) gilt. Dazu genügt es zu zeigen, daß

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \text{ verschwindet,}$$

sobald A zwei gleiche Zeilen hat. Seien also r-te und s-te Zeile gleich und $\sigma \in S_n$ die Permutation welche nur $r, s \in \{1, \dots, n\}$ vertauschen. Sei nun A_n die Menge der geraden Permutationen, so gilt

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\tau \in A_n} \left(\mathrm{sign}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} + \mathrm{sign}(\tau \circ \sigma)\, a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)} \right)$$

Nun geht $a_{1\tau\sigma(1)} \cdots a_{n\tau\sigma(n)}$ aus

$a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}$ dadurch hervor, daß man den r-ten Faktor $\alpha_{r\tau(r)}$ durch $\alpha_{r\tau(s)}$ und $\alpha_{s\tau(s)}$ durch $\alpha_{s\tau(r)}$ ersetzt. Wegen der Gleichheit der s-ten und r-ten Zeile ändert das nichts und die Beh. folgt aus $\operatorname{sign}(\tau\circ\sigma) = -\operatorname{sign}(\tau)$. $\square$

<u>Bsp 11.4</u> $n=2$, $A = \begin{pmatrix} \overset{\alpha_{11}}{a} & \overset{\alpha_{12}}{b} \\ \underset{\alpha_{21}}{c} & \underset{\alpha_{22}}{d} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \operatorname{sign}(\sigma)\,\alpha_{1\sigma(1)}\cdot\alpha_{2\sigma(2)} + \operatorname{sign}(\tau)\,\alpha_{1\tau(1)}\cdot\alpha_{2\tau(2)}$$

$$= ad - bc$$

$n=3$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$, dann

gilt mit Leibnizscher Formel:

$$\det(A) = (aek + bfg + cdh) - (gec + hfa + kdb)$$

<u>Merkregel:</u> (Sarrus'sche Regel)

$$\begin{array}{ccccccc} + & a^{+} & b^{+} & c^{+} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ & d & e & f & d & e & f \\ & g & h & k & g & h & k \end{array}$$

Für $n \geq 4$ gibt es keine so einfache Regeln, wie für $n = 2, 3$.

Sehr nützlich ist jedoch

<u>Propo 11.5</u> Für obere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = A \quad \text{gilt}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

<u>Beweis</u>