Ein Vektor $v \in V$ habe bezüglich der Basis $a_1, .., a_n$ die Koordinaten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, d.h. $v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$.

Dies beruht auf der Tatsache, daß wir einen kanonischen Isomorphismus $can: V \to K^n$, $a_i \mapsto e_i$ haben.

Sei nun $a_1', .., a_n'$ eine zweite Basis von V und bezeichne $T_{A'}^{A}$ die Basiswechselmatrix, wobei $A = \{a_1, .., a_n\}$ und $A' = \{a_1', \dots, a_n'\}$. Sind nun $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ und $(\lambda_1', \dots, \lambda_n')$ die Koordinaten für $v \in V$, so sieht man leicht

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = T_{A'}^{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise gilt für $V \simeq K^2$ mit Basen $A = \{b_1, b_2\}$, $A' = \{b_1', b_2'\}$ gerade:

$$T^{A}_{A'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \text{ wenn}$$

$$b_1 = \alpha_{11} b_1' + \alpha_{21} b_2', \quad b_2 = \alpha_{12} b_1' + \alpha_{22} b_2'.$$

Für $v = x_1 b_1 + x_2 b_2 = x_1' b_1' + x_2' b_2'$ gilt dann:

$$v = (x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{21}) b_1' + (x_1 \alpha_{12} + x_2 \alpha_{22}) b_2'$$

Also $x_1' = x_1 \alpha_{11} + x_2 \alpha_{21}$, $x_2' = x_1 \alpha_{12} + x_2 \alpha_{22}$.

Wir sehen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Seien nun V und W K-VR und $f: V \to W$ lineare Abb. Es seien $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $A' = \{a_1', \ldots, a_n'\}$ Basen von V und $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, $B' = \{b_1', \ldots, b_m'\}$ Basen von W gegeben.

Seien $M^A_B(f)$ und $M^{A'}_{B'}(f)$ die Abb.-matrizen von f bezüglich der Basen A, B bzw A', B'. Dann gilt

$$M^{A'}_{B'}(f) = T^B_{B'} \, M^A_B(f) \, T^{A'}_A$$

Das folgt aus folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V_{A'} \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "can"'] & & & W_{B'} \arrow[dl, "can"] \\
& K^n \arrow[r, "M^{A'}_{B'}(f)"] \arrow[d, "T^{A'}_A"'] & K^m \arrow[d, "T^{B'}_B"] & \\
& K^n \arrow[r, "M^A_B(f)"] & K^m & \\
V_A \arrow[rrr, "f"] \arrow[ur, "can"] & & & W_B \arrow[ul, "can"']
\end{tikzcd}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist, wenn $f: V \to V$ und wenn wir $A = \{a_1, .., a_n\}$ und $A' = \{a'_1, .., a'_n\}$ als Basen benutzen. Dann gilt

$$M^{A'}_{A'}(f) = T^{A}_{A'} M^{A}_{A}(f) T^{A'}_{A}$$

Mit $T = T^{A'}_{A}$ folgt $M^{A'}_{A'}(f) = T^{-1} M^{A}_{A}(f) T$.

<u>Def 10.1</u> Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$B = T^{-1} A T.$$

Diagramm dazu ist:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "T"'] & K^n \arrow[d, "T"] \\
K^n \arrow[r, "A"] & K^n \arrow[u, bend right, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Beobachtung: Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Dann ist A ähnlich zu A.

Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "E"'] & K^n \arrow[d, "E"] \\ K^n \arrow[r, "A"] & K^n \end{tikzcd}$$

Da $E^{-1} = E$ gilt offensichtlich

$$A = E^{-1} A E = E A E = E \cdot A = A.$$

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ähnlich, dann gilt:

$B = T^{-1} A T$ und somit

$$A = T B T^{-1} = (T^{-1})^{-1} B \, T^{-1}.$$

Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $B, C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ähnlich, so auch $A, C \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Das sieht man so:

$B = T^{-1}AT$ und $C = R^{-1}BR$. Einsetzen ergibt:

$$C = R^{-1}(T^{-1}AT)R = (TR)^{-1}A(TR).$$

Also sind A, C ähnlich.

Diese Beobachtung verallgemeinert sich zur Definition der Äquivalenzrelation.

<u>Def 10.2</u> Sei X eine Menge und $R \subset X \times X$ eine Teilmenge. Wir schreiben $a \sim b$ für $(a,b) \in R \subset X \times X$.
Man nennt R eine <u>Äquivalenzrelation auf X</u>, wenn gilt

(i) $a \sim a$ für alle $a \in X$ (reflexiv)

(ii) gilt $a \sim b$, so auch $b \sim a$ (symmetrisch)

(iii) aus $a \sim b$ und $b \sim c$ folgt $a \sim c$. (transitiv)

Bsp 10.3 $X = \mathrm{Mat}_n(K)$. $A, B \in X$ und

$A \sim B \iff B = T^{-1} A T$.

Haben gesehen, daß Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist.

Bsp 10.4 Sei $n \geq 0$ und $X = \mathbb{Z}$.

$a, b \in \mathbb{Z}$, dann definiert

$a \sim b \iff b - a = s \cdot n$ für ein $s \in \mathbb{Z}$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Zu (i): mit $s = 0$ folgt $a - a = 0 \cdot n$, also $a \sim a$.

Zu (ii): aus $b - a = s \cdot n$ folgt $a - b = (-s) \cdot n$.

Zu (iii): Seien $b - a = sn$ und $c - b = tn$, so folgt

$c - b + b - a = sn + tn = (s+t)n$,

also $a \sim c$.

Sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Zu jedem $a \in X$ bilden wir die

Äquivalenzklassen

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

Dann ist $[a] \subset X$ eine Teilmenge.
Da $a \sim a$ folgt $[a] \neq \emptyset$.

Propo 10.5 Sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Für alle $a, b \in X$ gilt:

$[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Beweis Sei $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Zu zeigen ist $[a] = [b]$.
Wähle $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt $c \sim a$ und $c \sim b$.
Sei $x \in [a]$, also $x \sim a$.
Da $a \sim x$ und $c \sim a$ folgt $c \sim x$. Da $b \sim c$ folgt

$b \sim x$, dh $x \sim b$ also $x \in [b]$.
Wir haben gezeigt, daß $[a] \subset [b]$. Analog zeigt man $[b] \subset [a]$, also $[a] = [b]$. ⊞

Wir wollen nun $[a] \subset X$ als Elemente $[a] \in X/_R$ auffassen. Unsere neue Menge ist also

$$X/_R := \{[a] \mid a \in X\}.$$

Mit dieser Notation erhalten wir:

<u>Propo 10.6</u> Sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die Vereinigung

$$X = \bigcup_{[a] \in X/_R} [a]$$

disjunkt.

<u>Beweis</u> Jedes $a \in X$ taucht in der Vereinigung auf, da $a \in [a]$. Nach Propo. 10.5 ist die Vereinigung disjunkt. ☒

<u>Anwendungen von Äquivalenzrelationen:</u>

Die Ringe $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ können nun und rigoroser definiert werden.

Sei $n \geq 0$. Auf $\mathbb{Z}$ haben wir Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow b-a = s \cdot n$ für ein $s \in \mathbb{Z}$

(siehe Bsp 10.4). Das bedeutet $n \mid b-a$.

Die Äquivalenzklassen

$$[a] = \{a + sn \mid s \in \mathbb{Z}\}$$

werden Kongruenzklassen genannt.

Schreiben $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{[a] \mid a \in \mathbb{Z}\}$

Auf $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ werden Verknüpfungen definiert

$$[a] + [b] = [a+b]$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Dadurch wird $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem Ring. Er enthält genau n Elemente $[0], [1], \ldots, [n-2], [n-1]$.

Haben in Übung folgendes gesehen:
Sei $U \subset K^n$ ein UVR. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, so daß $\mathrm{Ker}(A) = U$.
Wie kann man das genau verstehen? Mit Hilfe von Äquivalenzrelationen auf K^n!

Sei V ein K-VR und $U \subset V$ ein UVR. Definieren auf V eine Relation R durch

$$a \sim b \iff b - a \in U$$

Dies ist Äquivalenzrelation:
zu (i) $a \sim a$, da $a - a = 0 \in U$.