Propo. 3.18 Für $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ und $y \in K^m$ habe man eine Lösung v_y von $A \cdot x = y$. Bezeichnen wir mit L_y die Lösungsmenge des LGS $Ax = y$ und mit L_0 die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$, so gilt

$$L_y = v_y + L_0.$$

Beweis Wir müssen zeigen, daß

$$L_y \subset v_y + L_0 \quad \text{und}$$

$$v_y + L_0 \subset L_y.$$

Also sei $b \in v_y + L_0$, dh $b = v_y + r$, $r \in L_0$. Dann gilt

$$A \cdot b = A(v_y + r) = Av_y + Ar$$
$$= Av_y = y.$$

Also $b \in L_y$.

Sei nun $c \in L_y$. Dann gilt

für $c - v_y$ gerade $A(c-v_y) =$
$Ac - Av_y = y - y = 0$. Also $c - v_y \in L_0$,
d.h. $c \in v_y + L_0$. ☒

<u>Bsp. 9.19</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$

und $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$(A|y_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \cdot (-1) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rank}(A) = 2 \neq \mathrm{rank}((A|y_1)) = 3$. Daher
besitzt $Ax = y_1$ keine Lösung, d.h. $L_{y_1} = \emptyset$.

$$(A|y_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \cdot (-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir bestimmen die Lösungsmenge wie folgt:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 1 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 - 1 = 0$$

ZFS von A ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also

$$L_{y_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda_4 - (1 - 2\lambda_4) - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 1 - 2\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir erinnern an den assoziativen Ring $Mat_m(K)$. Das Einselement ist die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Hat eine Matrix $A \in Mat_m(K)$ ein Inverses bezüglich der Matrixmultiplikation, so heißt A <u>invertierbar</u>, Notation: A^{-1}.

Folgende Matrizen sind invertierbar: $\lambda \in K \setminus \{0\}$

$$E_r(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{— } r\text{-te Zeile} \\ r\text{-te Spalte} \end{array}$$

$$E_r(\lambda)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda^{-1} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{— } r\text{-te Zeile} \\ r\text{-te Spalte} \end{array}$$

$$E_r^s = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{r-te Zeile}\\ \\ \text{s-te Zeile}\\ \\ \\ \end{array}$$

$(E_r^s)^{-1} = E_r^s$ (nachrechnen)

$$E_r^s(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \lambda & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \text{r-te Spalte} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \text{s-te Zeile}\\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$(E_r^s(\lambda))^{-1} = E_r^s(-\lambda)$ (nachrechnen)

Die Matrizen $E_r(\lambda)$, E_r^s, $E_r^s(\lambda)$ heißen Elementarmatrizen. Es gilt

Propo. 9.20 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.
Dann entspricht $E_r(\lambda)\cdot A$ der Matrix, welche aus A durch Zeilenoperation

vom Typ III entsteht. $E_r^s \cdot A$ entspricht Zeilenop. vom Typ I und $E_r^s(\lambda) \cdot A$ Zeilenop. vom Typ II.

<u>Beweis</u> Nachrechnen!

Frage: Wie können wir entscheiden, ob ein $A \in Mat_n(K)$ invertierbar ist, und wie können wir gegebenenfalls A^{-1} berechnen?

<u>Propo 5.21</u> $A \in Mat_n(K)$ ist invertierbar genau dann, wenn $\operatorname{rank}(A) = n$.

<u>Beweis</u> Sei $A: K^n \to K^n$ lineare Abb und B das Inverse. Dann ist $B: K^n \to K^n$ und $A \cdot B = B \cdot A = E$. Also ist $A: K^n \to K^n$ bijektiv.

Propo 3.14 und 3.15 ergeben $\operatorname{rank}(A) = n$. Sei umgekehrt $\operatorname{rank}(A) = n$. Dann folgt aus Propo. 3.14 und 3.15, daß $A : K^n \to K^n$ bijektiv ist. Das bedeutet, es gibt $B : K^n \to K^n$ mit

$A \cdot B = B \cdot A = E$. ☒

Verfahren zur Bestimmung von A^{-1}:

zunächst

Lemma 3.22 Sei $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar und $B_1, \dots, B_n$ Elementarmatrizen, so daß

$B_1 \cdots B_n A = E$. Dann gilt $A^{-1} = B_1 \cdots B_n$.

Beweis Setze $B = B_1 \cdots B_n$. Dann $B \cdot A = E$.

Da A invertierbar, existiert $B' \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A \cdot B' = E$. Nun ist

$$B \cdot A \cdot B' = B = E \cdot B' = B'.$$

Also ist $B = A^{-1}$. $\square$

Da Multiplikation mit Elementarmatrizen den Zeilenoperationen vom Typ I, II und III entsprechen kann man folgendes machen:

	A	E
1)	$B_n A$	$B_n E$
2)	$B_{n-1} B_n A$	$B_{n-1} B_n E$
	$\vdots$	$\vdots$
n)	$\underbrace{B_1 \cdots B_n \cdot A}_{= E}$	$B_1 \cdots B_n \cdot E$

Dann steht auf der rechten Seite A^{-1}.

Bsp. 3.23 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$.

Zunächst schaut man, ob A invertierbar ist. Man rechnet nach, dass $\mathrm{rank}(A) = 4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \frac{1}{2} \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ -1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad A^{-1}$$

Man rechnet nach: $A A^{-1} = E$.

§ 10
Äquivalenzrelationen und Basiswechsel

Sei V ein K-VR und $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $A' = \{a_1', \dots, a_n'\}$ zwei Basen.

Sei nun $a_j = \beta_{1j} a_1' + \dots + \beta_{nj} a_n'$,

dann nennt man

$$T_{A'}^{A} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

die Basiswechselmatrix. Wir sehen $T_{A'}^{A} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und da $T_{A'}^{A}$ einer linearen Abb entspricht, welche die Basis A auf die Basis A' abbildet, ist $T_{A'}^{A}$ bijektiv, als Matrix also invertierbar. Offensichtlich gilt $\left(T_{A'}^{A}\right)^{-1} = T_{A}^{A'}$.