Propo 8.12 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ und B die Matrix, welche aus A durch Gauß-Algorithmus auf ZSF gebracht wurde. Dann gilt

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B).$$

Beweis Um $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ zu zeigen reicht es, Gleichheit bei Zeilenoperationen zu prüfen. Für Operationen vom Typ I und III ist das trivial. Wir müssen checken, ob dies auch für Operationen vom Typ II gilt. Sei $A = (\alpha_{ij})$ und

$$A \cdot x = 0 \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Das LGS $A \cdot x = 0$ sieht folgendermaßen aus:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0 \, , \quad 1 \le i \le m.$$

Sei B die Matrix, welche aus A durch Zeilenoperation vom Typ II entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ s \end{array} \; \mu$$

Dann ist das LGS für B gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j = 0 \, , \quad 1 \le i \le m \, , \quad i \neq s.$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\mu \alpha_{rj} + \alpha_{sj}) X_j = 0 .$$

Offensichtlich gilt $\mathrm{Ke}(A) \subset \mathrm{Ke}(B)$.

Sei nun $(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathrm{Ke}(B)$.

Da $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{rj} \eta_j = 0$ und

$$\sum_{j=1}^{n} (\mu \alpha_{rj} + \alpha_{sj}) \eta_j = 0 \quad , \text{ folgt}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} \eta_j = 0 \quad , \text{ dh } \operatorname{Ke}(B) \subset \operatorname{Ke}(A).$$

Da nun $\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$ folgt aus Theorem 8.21 gerade $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$ ☐

Mit dem Gauß-Algorithmus lassen sich einige Probleme der linearen Algebra lösen.

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$.

<u>Problem 1</u> (Berechung von $\operatorname{rank}(A)$ und $\dim(\operatorname{Ke}(A))$)

Bringe A mit Gauß-Algo. auf ZSF.
Dann $\operatorname{rank}(A)$ = Anzahl der Pivotspalten.
und $\dim(\operatorname{Ke}(A))$ = Anzahl der <u>Nicht</u>-Pivotspalten.

Problem 2 (Berechnung einer Basis von $\mathrm{Ker}(A)$)

Bringe A mit Gauß-Algo. auf Zeilen-stufenform $B = (\beta_{ij})$. Dann benutze Proposition 3.6 (Bsp. 3.7 zeigt wie's geht)

Propo 3.13 Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ und $A: K^n \to K^m$ die lineare Abb. Sei $\tilde{A}$ folgende Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & y_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & y_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m \times (n+1)}(K)$$

mit $y = (y_1, \dots, y_m) \in K^m$ beliebig. Dann gilt:

$$y \in \mathrm{Im}(A) \iff \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A}).$$

Beweis seien

$A: K^n \to K^m$ und $\tilde{A}: K^{n+1} \to K^m$

die entsprechenden linearen Abb. Mit

$U = \mathrm{Im}(A)$ und $\tilde{U} = \mathrm{Im}(\tilde{A})$ gilt

$\tilde{U} = \langle U, y \rangle$.

„$\Rightarrow$" Sei $y \in U$, dann $\tilde{U} = U$ also

$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \dim \tilde{U} = \dim U = \mathrm{rank}(A)$.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A})$. Da $U \subset \tilde{U}$

und $\dim U = \dim \tilde{U}$ folgt aus

Propo 7.16 $U = \tilde{U}$.

Problem 3 (Entscheiden, ob $y \in \mathrm{Im}(A)$ für $y \in K^m$)

Betrachte erweiterte Matrix $\tilde{A}$ aus Propo. 8.13

und bringe $\tilde{A}$ mit Gauß-Algo. auf

ZSF. $\tilde{B}$:

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\pi_1} & & & * & \\ & \boxed{\pi_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \boxed{\pi_r} & \\ & & & & \underbrace{\tilde{y}}_{1} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \}\, m-r \end{array}$$

Es gilt nach Propo. 8.13: $y \in \operatorname{Im}(A)$ genau dann, wenn die Einträge im $\tilde{y}$-Block verschwinden.

<u>Problem 4</u> (Basis für $\operatorname{Im}(A) \subset K^m$ angeben)

Bringe A mit Gauß-Algo. auf ZSF B. Sei $P = \{j_1, .., j_r\}$ die Menge der Pivotspaltenindizes und $a_1, .., a_n \in K^m$ die Spalten von A. Dann ist

$$a_j \in \operatorname{Im}(A)\,, \quad j \in P$$

eine Basis von $\operatorname{Im}(A)$.

Dies folgt aus der Tatsache, daß $a_j \in K^m$, $j \in P$ linear unabhängig sind und aus Propo. 3.4.

<u>Propo 9.14</u> Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ und $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spalten von A. Äquivalent sind

(i) $a_1, \dots, a_n \in K^m$ sind Erzeugendensystem von K^m.

(ii) $A : K^n \to K^m$ ist surjektiv

(iii) $\mathrm{rank}(A) = m$

<u>Beweis</u> Seien $e_1, \dots, e_n \in K^n$ die Standardbasisvektoren. Dann gilt

$a_j = A e_j$ und somit

$$\mathrm{Im}(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subset K^m.$$

Offensichtlich gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Das (i) $\Leftrightarrow$ (iii) folgt aus Propo 7.16

$\square$

<u>Propo 9.15</u> Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $a_1, \dots, a_n \in K^m$ die Spalten von A. Äquivalent sind

(i) $a_1, \dots, a_m \in K^n$ sind linear unabhängig

(ii) $\mathrm{Ker}(A) = 0$

(iii) $A : K^n \to K^m$ ist injektiv

(iv) $\mathrm{rank}(A) = n$.

<u>Beweis</u> Für $x_1, \dots, x_n \in K$ gilt

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

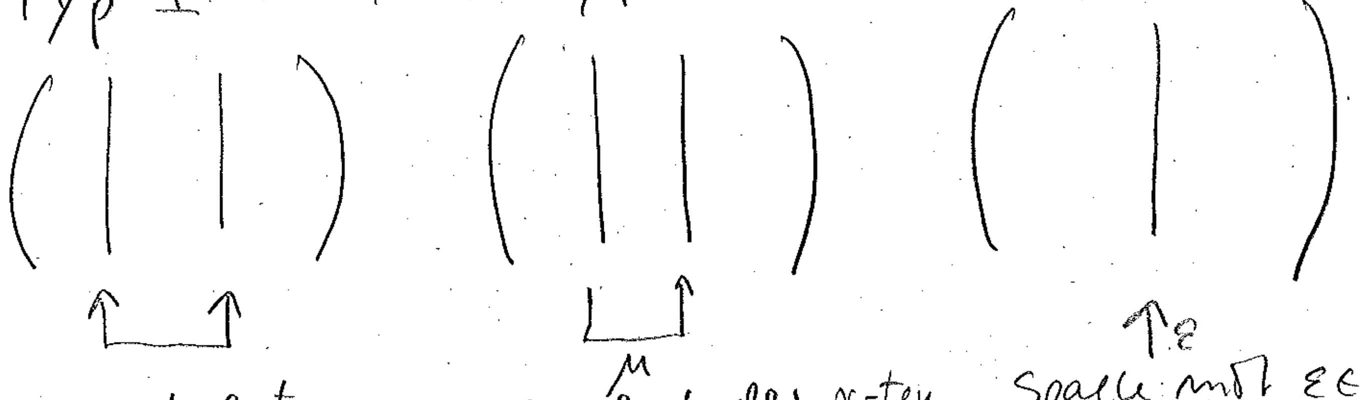
Offensichtlich gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Aus Lemma 8.16 folgt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Proposition 7.16 zeigt (i) $\Leftrightarrow$ (iv).

$\blacksquare$

Neben Zeilenoperationen gibt es auch <u>Spaltenoperationen</u>. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

Spaltenoperationen:

Typ I   Typ II   Typ III

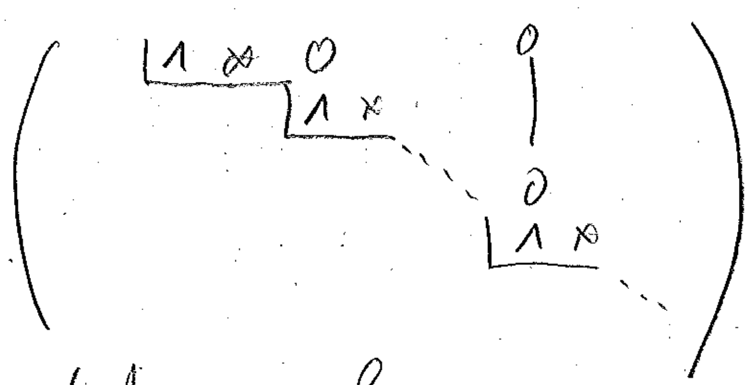


r-te und s-te Spalten vertauschen

μ-fache der r-ten Spalte zur s-ten Spalte addieren

Spalte mit $\varepsilon \in K \setminus \{0\}$ multiplizieren

Das Bild der Matrix A ändert sich nicht bei Spaltenoperationen vom Typ I und Typ III. Aus Austauschsatz von Steinitz folgt, dass Typ II-Operationen das Bild ebenfalls nicht ändern. Hat man eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit Zeilenoperationen auf reduzierte ZSF



gebracht, so kann man mit Spaltenoperationen die Matrix auf die Form

$$(*)\quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array} \\ \quad\underbrace{\qquad}_{r}\ \underbrace{\qquad}_{n-r} \end{array}$$

bringen.

Man kann also jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ durch Zeilen- und Spaltenoperationen auf die Form $(*)$ bringen. Hierbei ist $r = \mathrm{rank}(A)$.

Seien $U \subset K^m$ und $V \subset K^n$ die von den <u>Spalten</u> bzw <u>Zeilen</u> von A erzeugten UVR. Man definiert

$$\text{Spaltenrang} = \dim(U)$$
$$\text{Zeilenrang} = \dim(V)$$

Wir sehen, daß Spaltenrang und Zeilenrang bei $(*)$ übereinstimmen.

<u>Prop. 3.16</u> Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gilt Zeilenrang = Spaltenrang.

Damit ist Rang wohldefiniert.

Frage: Wie löst man LGS der Form $A \cdot x = b$, $b \in K^m$. Für $b = 0$ haben wir schon gesehen wie das geht.

<u>Korollar 3.17</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in K^m$ beliebig. Sei

$$\tilde{A} = \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix} \right).$$

(i) $A \cdot x = y$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A})$.

(ii) $A \cdot x = y$ besitzt für jedes $y \in K^m$ mindestens eine Lösung, wenn $\mathrm{rank}(A) = m$.

<u>Beweis</u> (i) ist Propo. 3.13.

(ii) folgt aus Propo. 3.14.

<u>Propo. 3.18</u> Für $A \in Mat_{m\times n}(K)$ und $y \in K^m$ habe man eine Lösung v_y von $A \cdot x = y$. Bezeichnen wir mit L_y die Lösungsmenge des LGS $Ax = y$ und mit L_0 die Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$, so gilt

$L_y = v_y + L_0$.

<u>Beweis</u> Wir müssen zeigen, daß

$L_y \subset v_y + L_0$ und

$v_y + L_0 \subset L_y$.

Also sei $b \in v_y + L_0$, d.h.

$b = v_y + r$, $r \in L_0$. Dann gilt

$$A \cdot b = A(v_y + r) = Av_y + Ar$$
$$= Av_y = y.$$

Also $b \in L_y$.

Sei nun $c \in L_y$. Dann gilt