Sind also $b_1, \dots, b_n \in K^m$ die Spalten der Matrix A, so gilt

$$\operatorname{rank}(A) = \dim_K \langle b_1, \dots, b_n \rangle.$$

<u>Propo 8.4</u> Sei $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ in Zeilenstufenform mit Spalten $b_1, \dots, b_n$ und mit Pivotelementen

$\pi_1 = \beta_{1,j_1}, \ \pi_2 = \beta_{2,j_2}, \dots, \pi_r = \beta_{r,j_r}$.

Sei $P = \{j_1, \dots, j_r\}$ Menge der Pivotindizes und $J = \{1, \dots, n\}$.

Dann gilt $\operatorname{rank}(B) = r$.

<u>Beweis</u> Es ist $\operatorname{Im}(B) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

Sei

$$P' = \{1 \le s \le n \mid b_s \notin \langle b_1, \dots, b_{s-1} \rangle\}$$

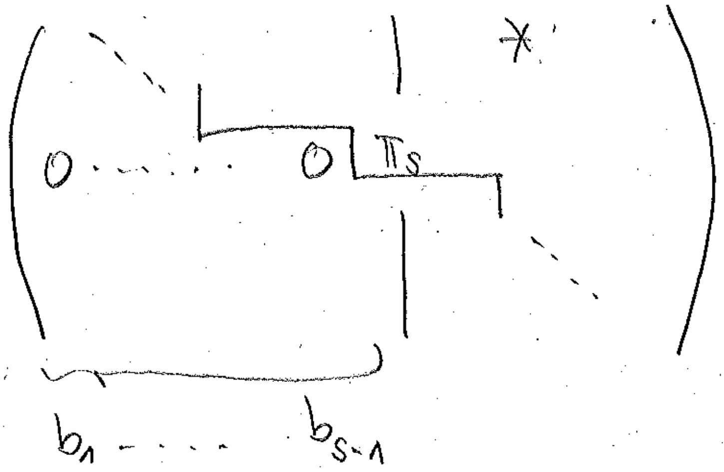
Dann bilden nach Lemma 6.10 die b_s, $s \in P'$ eine Basis von $\operatorname{Im}(B)$.

Wir zeigen $P = P'$.

Zunächst zeigen wir $P \subset P'$.

Sei $b_s \in K^m$ eine Pivotspalte mit Pivotelement $\pi_s \neq 0$, dh

$B =$

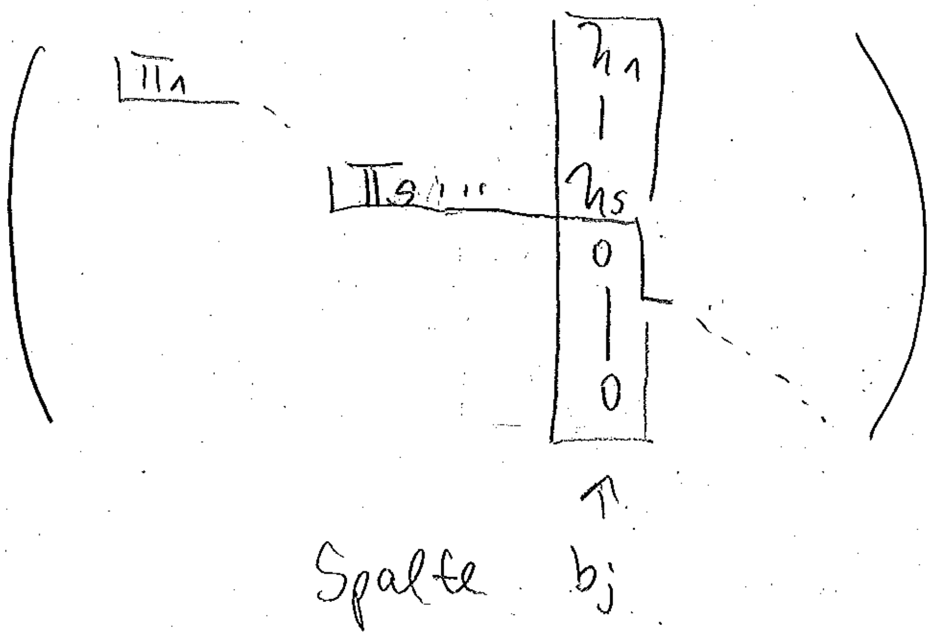


Offensichtlich gilt $b_s \notin \langle b_1, \dots, b_{s-1} \rangle$. Also $s \in P'$.

Nun zeigen wir $P' \subset P$.

Sei dann $b_j \in K^m$ keine Pivotspalte, dh

$B =$



Schreiben

$$b_j = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^s \times 0^{m-s} \subset K^m$$

Links neben b_j stehen genau s Pivotspalten. Diese sind linear unabhängig wegen $P \subset P'$, und erzeugen deshalb einen s-dimensionalen Untervektorraum $U \subset K^s \times 0^{m-s}$. Da $\dim(K^s \times 0^{m-s}) = s$, folgt $U = K^s \times 0^{m-s}$.

Insbesondere $b_j \in \langle b_{j_1}, \ldots, b_{j_s} \rangle$, wobei $j_1, \ldots, j_s$ die Pivotindizes $\leq j$. ■

Korollar 9.5 Alles wie in Propo. 9.4. Dann gilt

$\dim \mathrm{Ker}(B) = n - r$,

die Anzahl der Nicht-Pivotspalten.

Ist eine Matrix $B = (\beta_{ij})$ in ZSF, kann man leicht $\mathrm{Ke}(B)$ bestimmen.

Betrachten wir also LGS

$$\begin{array}{llll} \pi_1 x_{j_1} + \cdots & & & = 0 \\ & \pi_2 x_{j_2} + \cdots & & = 0 \\ & & \ddots & \\ & & \pi_r x_{j_r} + \cdots & = 0 \end{array} \qquad (*)$$

Offenbar kann man die Nicht-Pivot-variablen x_j, $j \in J \setminus P$ beliebig wählen, die Pivotvariablen $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ sind dann eindeutig festgelegt durch!

$$x_{j_r} = -\frac{1}{\pi_r} \sum_{j>j_r} \beta_{rj} x_j$$

$$\vdots$$

$$x_{j_1} = -\frac{1}{\pi_1} \sum_{j>j_1} \beta_{1j} x_j$$

(* *)

Das zeigt:

<u>Propo 3.6</u> Sei $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ in ZSF wie in Propo. 3.4. Dann gilt:

$$\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_j \in K \text{ bel. für } j \in J \setminus P, \\ x_{j_i} = -\frac{1}{\pi_i} \sum_{j>j_i} \beta_{ij} x_j \,, \; i = r, \dots, 1 \end{array} \right\}$$

Man kann mit Hilfe von Propo. 3.6 eine Basis von $\mathrm{Ker}(B)$ leicht angeben.

Besonders einfach wird es, wenn $B = (\beta_{ij})$ in <u>reduzierter ZSF</u> ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \\ & 1 & & \vdots & \\ & & \ddots & 0 & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

also die Pivotelemente $\pi_1 = \dots = \pi_r = 1$ und die Einträge oberhalb der Pivotelemente verschwinden. Dann gilt:

$$x_{j_r} = - \sum_{\substack{j > j_r \\ j \notin P}} \beta_{rj} x_j$$

$$\vdots$$

$$x_{j_1} = - \sum_{\substack{j > j_1 \\ j \notin P}} \beta_{1j} x_j$$

<u>Bsp 3.7</u> Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann

$\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 1$. Wir schauen uns

$B \cdot x = 0$, mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$ an.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Pivotvariablen sind x_3 und x_1.

Proposition 3.6 zeigt

$$\mathrm{Ker}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \in K^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} \eta_4, \eta_2 \text{ beliebig}, \\ \eta_3 = -2\eta_4 \text{ und} \\ \eta_1 = -2\eta_2 - 3\eta_4 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2\eta_2 - 3\eta_4 \\ \eta_2 \\ -2\eta_4 \\ \eta_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \eta_2, \eta_4 \in K \text{ bel.} \right\}$$

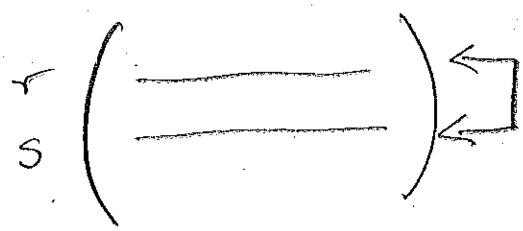
$$= \left\{ \eta_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \eta_2, \eta_4 \in K \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

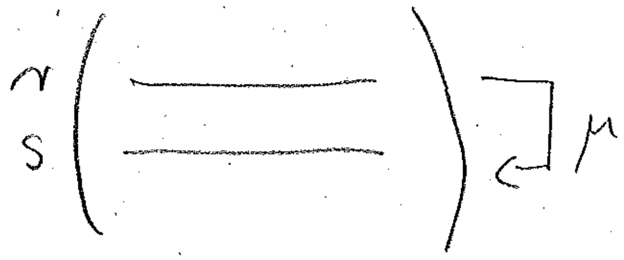
Sei nun $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ beliebig.

Wollen nun A durch einen Algorithmus in ZSF bringen, ohne dabei $\operatorname{Ker}(A)$ zu ändern. Das geschieht durch Zeilenoperationen:

Typ I: Vertausche r-te und s-te Zeile für gewisse $r \neq s$. Notation:



Typ II: Addiere μ-fache der r-ten Zeile zur s-ten Zeile für gewisse $\mu \in K$, $r \neq s$. Notation:



Typ III: Multipliziere r-te Zeile mit einem $\varepsilon \in K \setminus \{0\}$. Notation:

$$\begin{pmatrix} \rule{2cm}{0.4pt} \\ \\ \end{pmatrix} \xleftarrow{\varepsilon}$$

<u>Bsp. 9.8</u> Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \; -3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \end{pmatrix} \; 4$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad \pi_1 = 3, \; \pi_2 = 1, \; \pi_3 = 8.$$

in ZSF.

Dieses Beispiel lässt sich formalisieren

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$.

Der folgende Durchlauf bringt A auf die Form:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} \pi & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

wobei A' $(n-1)$ Spalten hat und $\pi \in K \setminus \{0\}$.

Falls in A die erste Spalte verschwindet ist nichts zu tun. Andernfalls machen wir folgende Schritte:

<u>1. Schritt</u> (Pivotsuche)

Wähle $1 \leq r \leq m$ mit $\alpha_{r1} \neq 0$.

<u>2. Schritt</u> (Zeilenoperation Typ I)

Vertausche r-te und 1-te Zeile.

Danach ist also $\pi = \alpha_{11} \neq 0$

3. Schritt (Zeilenoperation Typ II)

Für $i = 2, \ldots, m$ setze $\mu := -\frac{\alpha'_{i1}}{\pi}$ und addiere μ-fache der 1.-ten Zeile zur i-ten Zeile. Danach ist also

$\alpha_{21} = \ldots = \alpha_{m1} = 0.$

Dann ist die Matrix A in die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} \pi & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

gebracht worden.

Gauß-Algorithmus: Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$. Man bringt A durch die Schritte 1.–3. auf die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right) \text{ mit } A' \in \mathrm{Mat}_{m \times (n-1)}(K)$$

oder

$$\left(\begin{array}{c|c} \pi & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right) \text{ mit } A' \in \mathrm{Mat}_{(m-1) \times (n-1)}(K)$$

Danach wendet man die Schritte 1. – 3. auf A' an. Nach endlich vielen Durchläufen erhält man eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ in ZSF:

$$B = \begin{pmatrix} \pi_1 & & & * \\ & \pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi_r \end{pmatrix}.$$

__Bemerkung 3.9__ Mit Zeilenoperationen vom Typ III erreicht man, $\pi_1 = \dots = \pi_r = 1$. Mit weiteren Zeilenoperationen vom Typ II erreicht man reduzierte ZSF.

__Theorem 3.10__ Der Gauß-Algorithmus bringt jedes $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ durch endlich viele

Zeilenoperationen vom Typ I und Typ II auf ZSF

$$B = \begin{pmatrix} \pi_1 & & & * \\ & \pi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi_r \end{pmatrix}$$

Durch endlich viele weitere Zeilenoperationen vom Typ II und Typ III erreicht man reduzierte ZSF

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung 8.11</u> Wegen der Pivotsuche ist der Gauß-Algorithmus nicht-deterministisch. Entsprechend ist ZSF nicht eindeutig. Die reduzierte ZSF jedoch ist eindeutig. Beweis in Übung!