$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ zu einem $K$-Vektorraum.

Die Abb $f \mapsto (\alpha_{ij})$ ist linear, da

$$(f+f')(a_j) = f(a_j) + f'(a_j) =$$
$$= \left(\sum \alpha_{ij} b_i\right) + \left(\sum \alpha'_{ij} b_i\right)$$
$$= \sum (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij})\, b_i$$
$$(\lambda \cdot f)(a_j) = \lambda \cdot f(a_j) = \lambda \left(\sum \alpha_{ij} b_i\right)$$
$$= \sum (\lambda \cdot \alpha_{ij})\, b_i$$

FB

Sei nun $V = K^n$ und $W = K^m$. Dann hat man eine kanonische Wahl für Basen $a_j = e_j \in K^n$, $1 \leq j \leq n$ und $b_i = e_i \in K^m$, $1 \leq i \leq m$. Erhalten so

$$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),$$

dh die linearen Abb $f : K^n \to K^m$

„sind" die Matrizen. Das erklären wir genauer.

Sei $x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x_1 f(a_1) + \dots + x_n f(a_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \Big( \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big( \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \Big) b_i \\
&= \Big( \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j}_{\uparrow}, \dots \Big)
\end{aligned}
$$

i-te Stelle

Nehmen wir jetzt $(\alpha_{ij}) = A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, dann kann man folgendes definieren

$$
\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\alpha_{i1} \;\cdots\; \alpha_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \\ \vdots \end{pmatrix} = f(x)
$$

Auf diese Art und weise ist

$f(X) = A \cdot x$ und $A : K^n \to K^m$ linear.

<u>Bsp. 8.22</u> Sei $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0$, $1 \le i \le m$

ein LGS.

Wir können das Gleichungssystem jetzt schreiben als

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $(\alpha_{ij}) = A$ und $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ist $A \cdot X = 0$.

Der Lösungsraum $L$ ist also der Kern der linearen Abb $A : K^n \to K^m$. Also $L = \mathrm{Ker}(A)$.

Wir betrachten jetzt folgende Situation:

Seien $g: U \to V$ und $f: V \to W$ lineare Abb. und $a_1, \ldots, a_r \in U$, $b_1, \ldots, b_n \in V$ und $c_1, \ldots, c_m \in W$ Basen.

Durch $g(a_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} b_j$ und $f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \eta_{ij} c_i$ erhalten wir Matrizen

$$A = (\eta_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{und} \quad B = (\mu_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le r}}$$

Nun berechnen wir die Matrix von $f \circ g$:

$$f(g(a_k)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{jk} f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_{jk} \eta_{ij} c_i .$$

Zu jedem $i$ ist der Koeffizient bei $c_i$ also

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij} \mu_{jk} \in K$$

Wir erhalten für $f \circ g$ also die Matrix

$$\left( \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mu_{jk} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le r}}$$

Auf diese Weise definieren wir die <u>Matrix-multiplikation</u>:

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{m \times n}(K) \times \mathrm{Mat}_{n \times r}}_{\text{gleich}}(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m \times r}(K)$$

$$(\lambda_{ij}) \cdot (\mu_{jk}) = \left( \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mu_{jk} \right)$$

<u>Bsp 8.23</u> $m = n = r = 2$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

oder für $m = 1$, $n = 3$, $r = 2$

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bw+cy \\ av+bx+cz \end{pmatrix}$$

<u>Propo 8.24</u> Für $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n \times r}(K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_{r \times s}(K)$ gilt

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \in \mathrm{Mat}_{m \times s}(K)$$

Beweis Kann man direkt nachrechnen.

Alternativ:

Seien $f: K^n \to K^m$, $g: K^r \to K^n$ und $h: K^s \to K^r$ die linearen Abb zu $A$, $B$ und $C$. Dann gilt offenbar

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

☒

Propo 8.25 Der Vektorraum $Mat_n(K)$ wird mit Matrixmultiplikation zu einem assoziativen Ring.

Beweis Man rechnet nach, daß

$$A(B+B') = A \cdot B + A \cdot B' \quad \text{und}$$

$$(A+A') \cdot B = AB + A'B.$$

Nullelement ist die Nullmatrix

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ und Einselement

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ ist die

Einheitsmatrix.

Betrachten wir die Matrizen

$$B_{rs} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \leftarrow r\text{-te Zeile} \quad \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$$

$\uparrow$ s-te Spalte

so bilden die $B_{rs}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq s \leq n$ eine Basis des Vektorraums $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

Es gilt also $\dim(\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)) = m \cdot n$.

Propo. 8.26 Es seien $V$ und $W$ zwei $K$-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Dann gilt $\dim(\mathrm{Hom}(V,W)) = m \cdot n$.

Beweis Folgt aus Propo. 8.21, Propo. 8.17 und aus $\dim(\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)) = m \cdot n$

$\square$

# § 9
# Gauß-Algorithmus

Def 9.1 Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. Man definiert den Rang von $f$ als $\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$.

Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ als lineare Abb $A: K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ schreiben wir $\mathrm{rank}(A)$.

Der Gauß-Algorithmus wandelt eine Matrix $A$ in eine Matrix $B$ um, so daß $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$ und $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$.

Def 9.2 Sei $K$ ein Körper. Eine Matrix $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ hat Zeilenstufenform (ZSF), wenn sie folgende Gestalt hat irgendwelche Einträge

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & & & & & * \\ & & \pi_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \pi_r & \end{pmatrix}$$

alles verschwindet

Hierbei sind $\pi_1, \ldots, \pi_r \in K \setminus \{0\}$ und

$0 \leq r \leq \min\{m, n\}$.

<u>Bsp 9.3</u> In Zeilenstufenform sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht jedoch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die $\pi_1, \dots, \pi_r \in K \setminus \{0\}$ nennt man Pivotelemente und die entsprechenden Spalten Pivotspalten. Schreibt man $\pi_i = \beta_{i,j_i}$ mit $1 \le i \le r$, so nennt man $j_1, \dots, j_r$ die Pivotindizes.

Sei nun $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ und fassen wir $A$ vermöge $A : K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$ als lineare Abb. auf, so wird $\mathrm{Im}(A) \subset K^m$ von den Bildern der Vektoren $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$, $1 \le j \le n$ erzeugt. Diese sind

$$A e_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix},$$

also die $j$-te Spalte von $A$.

Sind also $b_1, \dots, b_n \in K^n$ die Spalten der Matrix $A$, so gilt

$\mathrm{rank}(A) = \dim_K \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

<u>Propo 3.4</u> Sei $B = (\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ in Zeilenstufenform mit Spalten $b_1, \dots, b_n$ und mit Pivotelementen

$\pi_1 = \beta_{1,j_1}, \pi_2 = \beta_{2,j_2}, \dots, \pi_r = \beta_{r,j_r}$.

Sei $P = \{j_1, \dots, j_r\}$ Menge der Pivotindizes und $J = \{1, \dots, n\}$.

Dann gilt $\mathrm{rank}(B) = r$.

<u>Beweis</u> Es ist $\mathrm{Im}(B) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

Sei

$P' = \{1 \le s \le n \mid b_s \notin \langle b_1, \dots, b_{s-1} \rangle\}$

Dann bilden nach

die $b_j, j \in P'$ eine Basis von $\mathrm{Im}(B)$.