$\lambda_i \neq 0$ und $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i a_i + \dots + \lambda_n a_n = 0$

Dann gilt:

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{i-1} a_i + \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1} + \dots + \lambda_n a_n) =$$

$$f(0) = 0$$

$$= \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_i f(a_i) + \dots + \lambda_n f(a_n)$$

Da jedoch $f(a_1), \dots, f(a_n)$ linear unabhängig, folgt $\lambda_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dies ist ein Widerspruch.

Frage: Wann gilt die Umkehrung von Lemma 8.14?

Def. 8.15 Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb.

Man nennt

$$\ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{a \in V \mid f(a) = 0\}$$

den Kern von f und

$$\operatorname{Im}(f) = f(V) = \{f(a) \mid a \in V\}$$

das Bild von f.

Man rechnet leicht nach, daß

$$\mathrm{Ker}(f) \subset V \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(f) \subset W$$

Untervektorräume sind.

<u>Lemma 8.16</u> Eine lineare Abb. $f: V \to W$ ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" klar, folgt aus Propo. 8.6 (i) und Definition der Injektivität.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. Nehmen wir $a, a' \in V$ mit $f(a) = f(a')$, so folgt $f(a) - f(a') = 0$.

Nun ist $f(a) - f(a') = f(a - a') = 0$ und da $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$, erhalten wir $a - a' = 0$. Also $a = a'$.

$\square$

Wir können nun obige Frage beantworten.

<u>Propo 8.17</u> Sei $f: V \to W$ linear injektiv und $a_1, \dots, a_n \in V$. Dann sind $a_1, \dots, a_n \in V$ linear unabhängig, genau dann, wenn $f(a_1), \dots, f(a_n)$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u> „$\Leftarrow$" Ist gerade Lemma 8.14.
„$\Rightarrow$" Zu zeigen ist, $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sind linear unabhängig.
Sei dazu

$$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) = 0 .$$

Wegen Linearität gilt

$$f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = 0 .$$

Da $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, gilt

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 .$$

Da $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig, erhalten wir $\lambda_i = 0$ für alle

$1 \leq i \leq n$.

Propo 8.18 Seien V und W zwei K-Vektorräume. Es gilt

(i) Sei $f: V \to W$ ein Isomorphismus, so folgt $\dim(V) = \dim(W)$

(ii) Falls $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so existiert ein Isomorphismus $f: V \to W$.

Beweis

(i) Ist $\dim(V) = \infty$, so folgt mit Korollar 7.12, daß es eine Folge $a_1, a_2, \ldots, \in V$ linear unabhängige Vektoren gibt. Aus Propo. 8.17 folgt, daß

$f(a_1), f(a_2), \ldots, \in W$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren aus W. Also $\dim(W) = \infty$.

Sei nun $\dim(V) = n < \infty$ und $a_1, \dots, a_n \in V$ Basis. Dann sind $f(a_1), \dots, f(a_n)$ linear unabhängig nach Propo. 8.17. Also $\dim(W) \geq n$.

Sei $y \in W$ und x das Urbild, d.h. $f(x) = y$ (existiert, da f surjektiv).

Schreibe $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ als Linearkombination. Dann gilt $f(x) = y =$

$\lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$. Also gilt

$$\langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle = W.$$

Folglich $\dim(W) = n$.

(ii) Sei nun $\dim(V) = \dim(W) = n < \infty$.
Wählen Basen $a_1, \dots, a_n \in V$ und $b_1, \dots, b_n \in W$.
Laut Propo 8.10 ex. lineare Abb.
$f : V \to W$ mit $f(a_i) = b_i$.
zu zeigen bleibt, f ist bijektiv.

<u>Injektivität:</u> Sei $x \in \operatorname{Ker}(f)$.

Schreibe $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Dann gilt

$$f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n) =$$
$$= \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$$

Da $b_1, \dots, b_n$ Basis, folgt $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Also $x = 0$, d.h. $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Surjektivität zeigt man wie in (i). ☐

<u>Korollar 8.19</u> Ist V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$. Dann existiert ein Isomorphismus $f: V \to K^n$

<u>Bemerkung 8.20</u> Korollar 8.19 bedeutet, daß es bis auf Isomorphie als endlich-dimensionale K-VR nur die K^n gibt.

zwischen Kern und Bild eines linearen Abb $f: V \to W$ besteht ein wichtiger Zusammenhang.

<u>Theorem 8.21</u> Sei $f: V \to W$ lineare Abb. zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

<u>Beweis</u> Sei $s = \dim \mathrm{Ker}(f)$ und $r = \dim \mathrm{Im}(f)$. Wählen Basen $a_1, \dots, a_s \in \mathrm{Ker}(f)$ und $b_1, \dots, b_r \in \mathrm{Im}(f)$. Seien $a_{s+i} \in V$ die Urbilder von b_i, $1 \le i \le r$. Wir zeigen nun, daß

$a_1, \dots, a_s, a_{s+1}, \dots, a_{s+r} \in V$

eine Basis bilden.

Wir zeigen zunächst

$$\langle a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_{s+r} \rangle = V.$$

Sei $x \in V$ und schreibe

$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i b_i$. Wir bilden

$x' = \sum_{i=1}^{r} \mu_i a_{s+i} \in V$. Dann gilt

$$f(x') = \sum_{i=1}^{r} \mu_i f(a_{s+i}) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i b_i = f(x).$$

Also folgt $x - x' \in \mathrm{Ker}(f)$. Dann gilt

$$x - x' = \eta_1 a_1 + \ldots + \eta_s a_s.$$

Dann folgt

$$x = (x - x') + x' = \sum_{j=1}^{s} \eta_j a_j + \sum_{i=1}^{r} \mu_i a_{s+i}.$$

Also $\langle a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_{s+r} \rangle = V$.

Nun zeigen wir, daß die Vektoren

$a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots, a_{s+r}$ linear unabhängig sind. Sei dann

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s + \lambda_{s+1} a_{s+1} + \dots + \lambda_{s+r} a_{s+r} = 0$$

Anwendung von f ergibt

$$0 = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_s f(a_s) + \lambda_{s+1} f(a_{s+1}) + \dots + \lambda_{s+r} f(a_{s+r}).$$

$$= \lambda_{s+1} f(a_{s+1}) + \dots + \lambda_{s+r} f(a_{s+r})$$

$$= \lambda_{s+1} b_1 + \dots + \lambda_{s+r} b_r.$$

Da $b_1, \dots, b_r \in \mathrm{Im}(f)$ linear unabhängig, folgt $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{s+r} = 0$. Also gilt

$0 = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s$ und da $a_1, \dots, a_s \in \mathrm{Ker}(f)$ linear unabhängig folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0$. ∎

Wir schreiben

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = \{(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \mid \alpha_{ij}\in K\}$$

als die Menge aller $(m\times n)$-Matrizen.

Man nennt i den <u>Zeilenindex</u> und j den <u>Spaltenindex</u> der Matrix (α_{ij}).

Für eine Matrix (α_{ij}) schreibt man kurz $A\in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Es sei nun $f: V\to W$ eine lineare Abb und $a_1,\dots,a_n\in V$ und $b_1,\dots,b_m\in W$ Basen und $A=(\alpha_{ij})$ die Matrix der Abb. f. Dann erhalten wir

Abb.

$$(*)\quad \mathrm{Hom}(V,W)\longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),$$
$$f\longmapsto (\alpha_{ij}) = A.$$

<u>Propo 8.22</u> Die obige Abb. (*) ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

<u>Beweis</u> Die Abb.

$$\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$$
$$f \longmapsto (\alpha_{ij}) = A$$

ist injektiv nach Propo. 8.10 und Definition von Basis.

Sei nun $(\beta_{ij}) = B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

Definiere

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \cdot b_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n.$$

Nach Propo. 8.10 erhält man so lineare Abb. $f: V \to W$.

Zu klären ist noch die Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

Durch

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \quad \text{und}$$

$$\lambda \cdot (\alpha_{ij}) = (\lambda \cdot \alpha_{ij}) \quad \text{wird}$$

$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ zu einem K-Vektorraum.

Die Abb $f \mapsto (\alpha_{ij})$ ist linear, da

$$(f+f')(a_j) = f(a_j) + f'(a_j) =$$
$$= \left(\sum \alpha_{ij} b_i\right) + \left(\sum \alpha'_{ij} b_i\right)$$
$$= \sum (\alpha_{ij} + \alpha'_{ij})\, b_i$$

$$(\lambda \cdot f)(a_j) = \lambda \cdot f(a_j) = \lambda \cdot \left(\sum \alpha_{ij} b_i\right)$$
$$= \sum (\lambda \cdot \alpha_{ij})\, b_i$$

Sei nun $V = K^n$ und $W = K^m$. Dann hat man eine kanonische Wahl für Basen $a_j = e_j \in K^n$, $1 \le j \le n$ und $b_i = e_i \in K^m$, $1 \le i \le m$. Erhalten so

$$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(K),$$

dh die linearen Abb $f : K^n \to K^m$