Bsp 7.29 $V = K^n = \underbrace{K \oplus K \oplus \cdots \oplus K}_{n\text{-mal}}$.

§ 8
Lineare Abbildungen und Matrizen

Def 8.1 Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen V und W heißt linear, wenn gilt

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(ii) $f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$

für alle $a, b \in V$ und $\lambda \in K$.

Bsp 8.2 Sei
$$\begin{aligned} aX + bY &= 0 \\ cX + dY &= 0 \end{aligned}$$
ein LGS über dem Körper K, d.h. $a, b, c, d \in K$. Wir sahen in Bsp 5.3., daß der Lösungsraum $L \subset K^2$ ein Untervektorraum ist.

Betrachten wir die Abb.

$$f : L \to K^2 , \quad (\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} a\lambda + b\mu \\ c\lambda + d\mu \end{pmatrix} .$$

Dann gilt für $v = (\lambda, \mu)$, $w = (\lambda', \mu')$ und $r \in K$:

$$f(v+w) = \begin{pmatrix} a(\lambda+\lambda') + b(\mu+\mu') \\ c(\lambda+\lambda') + d(\mu+\mu') \end{pmatrix} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} a\lambda + a\lambda' + b\mu + b\mu' \\ c\lambda + c\lambda' + d\mu + d\mu' \end{pmatrix} = 0$$

$$= f(v) + f(w)$$

$$f(r \cdot v) = \begin{pmatrix} a(r\lambda) + b(r\mu) \\ c(r\lambda) + d(r\mu) \end{pmatrix} = 0$$

$$= r \cdot f(v)$$

<u>Bsp 8.3</u>. Nullabbildung $V \to W$, $a \mapsto 0$ ist linear.

Die Identität $id_V : V \to V$, $a \mapsto a$ ist linear.

Die <u>Inklusionsabb</u> $i : U \to V$, $a \mapsto a$ für Untervektorraum $U \subset V$ ist linear.

Bsp 8.4 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a+3$ ist nicht linear. Es gilt:

$$f(1+2) = f(3) = 6, \text{ aber}$$

$$f(1) = 4 \text{ und } f(2) = 5, \text{ also}$$

$$f(1+2) \neq f(1) + f(2).$$

Propo 8.5 Sei $\alpha \in K$. Dann ist

$$f: K \to K, \quad a \mapsto \alpha a$$

linear. Außerdem ist jede lineare Abb $g: K \to K$ von der Form $a \mapsto \alpha a$ mit $\alpha = g(1)$.

Beweis Es gilt
$$f(a+b) = \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b = f(a) + f(b)$$

und
$$f(\lambda \cdot a) = \alpha \cdot (\lambda \cdot a) = \alpha \cdot \lambda \cdot a = \lambda \cdot \alpha \cdot a = \lambda \cdot f(a)$$

Sei nun $g: K \to K$ linear. Dann ist $g(a) = g(a \cdot 1) = a \cdot g(1) = \alpha \cdot a$

Lineare Abb. haben folgende Eigenschaften:

<u>Propo 8.6</u> Es sei $f: V \to W$ eine lineare Abb.
Dann gilt:

(i) $f(0) = 0$

(ii) $f(-a) = -f(a)$

(iii) $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(a_i)$

<u>Beweis</u>

(i) Es gilt $f(0_V) = f(0_K \cdot 0_V) = 0_K \cdot f(0_V)$
$= 0_W$

(ii) Sei $\lambda = -1$. Dann gilt
$f(-a) = f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a) = -1 \cdot f(a)$
$= -f(a)$

(iii) In Linearkombinationen $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$
verschwinden fast alle λ_i. Man hat
also nur endlich viele λ_i, $i \in I$, die
ungleich Null sind. Ohne Einschränkg

sei $I = \{1, \ldots, n\}$. Dann folgt die Behauptung per Induktion nach $n \geq 0$. ⊠

Def 8.7 Seien V und W, K-Vektorräume. Dann nennt man den K-Vektorraum

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ linear} \}$$

den Hom-Raum. Die Verknüpfungen sind gegeben durch

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$$
$$(\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a).$$

Propo 8.8 Ist $f : V \to W$ eine lineare bijektive Abb. Dann ist $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls linear.

Beweis Wir müssen zeigen:

$$f^{-1}(a+b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$$

$f^{-1}(\lambda \cdot a) = \lambda f^{-1}(a)$.

Es gilt:

$f(f^{-1}(a+b)) = a+b$ und

$f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)) = a+b$.

Da f bijektiv, folgt $f^{-1}(a+b) = f^{-1}(a) + f^{-1}(b)$.

Analog zeigt man $f^{-1}(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f^{-1}(a)$. ☐

Bemerkung 8.9 Bijektive lineare Abb $f: V \to W$ heißen Isomorphismen.

In diesem Fall sind V und W strukturell „gleich", obwohl V und W sehr unterschiedliche Vektorräume seien können.

Existiert ein Isomorphismus $f: V \to W$, so nennt man V und W isomorph.

Lineare Abb. können auf bemerkenswert einfache Weise hingeschrieben werden.

<u>Propo 8.10</u> Seien V und W zwei K-Vektorräume und $a_i \in V$, $i \in I$ eine Basis. Zu jeder Familie $b_i \in W$, $i \in I$ gibt es <u>genau eine</u> lineare Abb $f: V \to W$ mit $f(a_i) = b_i$ für alle $i \in I$.

<u>Beweis</u> Seien $f, g: V \to W$ zwei solche linearen Abb. Schreiben wir $x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in V$ als Linear-kombination, so gilt mit Propo. 8.6

$$
\begin{aligned}
f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(a_i) &= \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \\
&= \sum_{i \in I} \lambda_i g(a_i) \\
&= g(x).
\end{aligned}
$$

Also sind f und g gleich.

Wenn man also zwei solche linearen Abb hat, so sind sie gleich. Wir zeigen nun, daß es eine solche Abb. gibt.

Wir definieren zunächst eine Abb:

$$f: V \to W, \quad x \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$$

wobei $x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$.

Wir zeigen, daß f linear ist. Für $x = a_i$ gilt dann $f(a_i) = b_i$.

Also, seien $x, x' \in V$ mit

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \quad \text{und} \quad x' = \sum_{i \in I} \lambda_i' a_i .$$

Dann gilt

$$f(x+x') = f\Big(\sum_{i \in I} (\lambda_i + \lambda_i') a_i\Big) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \lambda_i') b_i$$

$$= \sum_{i \in I} \lambda_i b_i + \sum_{i \in I} \lambda_i' b_i$$

$$= f(x) + f(x').$$

Analog zeigt man $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

<u>Bemerkung 8.11</u> Proposition 8.10 zeigt, daß eine lineare Abb $f: V \to W$ schon dadurch festgelegt ist, wohin man die Basisvektoren $a_i \in V$, $i \in I$ abbildet.

Wir betrachten nun folgende Situation: Seien $a_1, \dots, a_n \in V$ und $b_1, \dots, b_m \in W$ Basen und $f: V \to W$ eine lineare Abb. Schreiben wir

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i \quad , \quad 1 \leq j \leq n ,$$

so sind die Koeffizienten α_{ij} eindeutig bestimmt. Wir schreiben α_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ als rechteckiges Schema

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Oder $(\alpha_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n}$ als Kurzschreibweise. Man nennt (α_{ij}) die Matrix der Abb. f bezüglich der Basen a_i und b_j.

Def 8.12 Eine $(m \times n)$-Matrix mit Einträgen in einem Körper K ist eine Abb

$$\alpha : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K.$$

Man notiert

$$\alpha = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Bsp 8.13 Sei $V = W = K^2$ und $f : K^2 \to K^2$ folgende lineare Abb. $(a, b) \mapsto (3a, a+b)$.

Wählen wir $e_1, e_2 \in K^2$ als Basis, so erhalten wir:

$$f(e_1) = f(1,0) = (3,1) = 3 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (0,1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

Dann ist $\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir machen nun folgende Beobachtung:

<u>Lemma 8.14</u> Sei $f: V \to W$ eine lineare Abb. und $a_1, \ldots, a_n \in V$, deren Bilder $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ linear unabhängig sind. Dann sind auch $a_1, \ldots, a_n \in V$ linear unabhängig.

<u>Beweis</u> Wir zeigen, daß $a_1, \ldots, a_n \in V$ linear unabhängig sind.
Angenommen $a_1, \ldots, a_n \in V$ sind linear abhängig. Dann existiert ein $\lambda_i \in K$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß