<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$" Sei $n = \dim(U) = \dim(V)$.

Wähle Basis $b_1, \dots, b_n \in U$.

Wir zeigen, daß $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$.

Angenommen nicht, so existiert

$b_{n+1} \in V$ mit $b_{n+1} \notin \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.

Nach Lemma 6.10 sind

$b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ linear unabhängig.

Dies ist ein Widerspruch, da

$\dim(V) = n$.

$\boxtimes$

<u>Korollar 7.17</u> Für jeden Vektorraum V gilt

$$V = \{0\} \iff \dim(V) = 0.$$

<u>Bsp 7.18</u> Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U \subset V$. Ist $\dim(U) = 0$, so $U = \{0\}$. Ist $\dim(U) = 3$, so folgt $U = \mathbb{R}^3$.

Bsp 7.19 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $a = (1,1,1)$. Dann ist $\dim(U) = 1$ für $U = \langle a \rangle$. Wir sehen

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind Basis von $\mathbb{R}^3$.

Dies lässt sich verallgemeinern.

Propo 7.20 (Basisergänzungssatz) Sei $a_1, \dots, a_n \in V$ eine Basis und $b_1, \dots, b_m$ linear unabhängig. Dann gilt $m \leq n$ und die $b_1, \dots, b_m$ können durch $n-m$ Vektoren aus der Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ zu einer Basis ergänzt werden.

Beweis: Beweis per Induktion nach m.

$m = 0$ klar.

Sei nun $m \geq 1$.

Nehmen an, die Behauptung gilt für $m-1$. Wir können also die linear unabhängigen Vektoren

$$b_1, \dots, b_{m-1} \in V$$

durch $n-(m-1)$ Vektoren aus der Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ zu einer Basis ergänzen.

Ohne Einschränkung seien dies $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$.

Also bilden die Vektoren

$$b_1, \dots, b_{m-1}, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$$

eine Basis von V. Wir schreiben jetzt

$$b_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i b_i + \sum_{i=m}^{n} \lambda_i a_i$$

Da $b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ linear unabhängig, ist $\lambda_m = \dots = \lambda_n = 0$ unmöglich. Daher ist mindestens eins der λ_i, $m \le i \le n$ nicht Null. Wenden wir nun Lemma 7.4 an, und nehmen wir ohne Einschränkung $j = m$ an, so folgt, daß

$$b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in V$$

eine Basis ist. ☒

Sei nun V ein Vektorraum und $U, U' \subset V$ Untervektorräume. Dann ist auch $U \cap U' \subset V$ ein Untervektorraum.

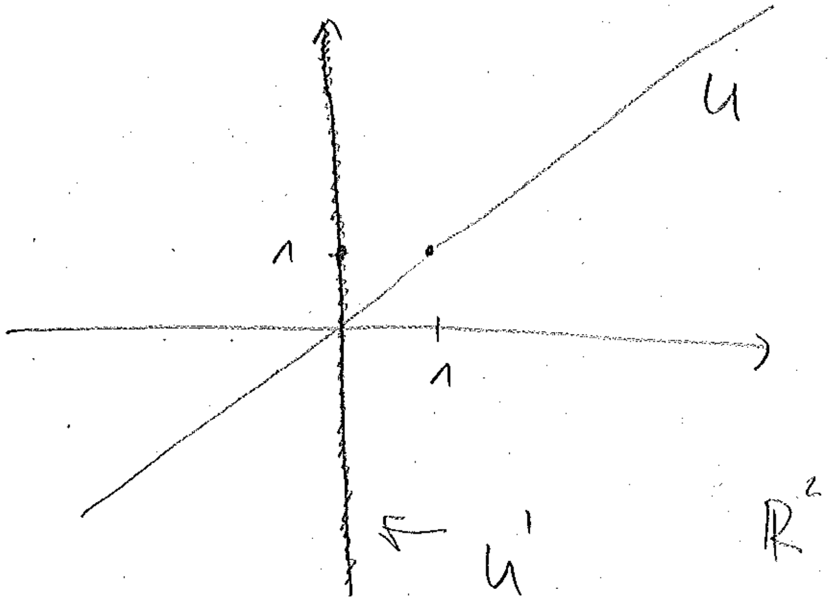
Def 7.21 Sind $U, U' \subset V$ Untervektorräume von V, so heißt

$$U + U' = \{a + b \mid a \in U, b \in U'\}$$

die Summe von U und U'.

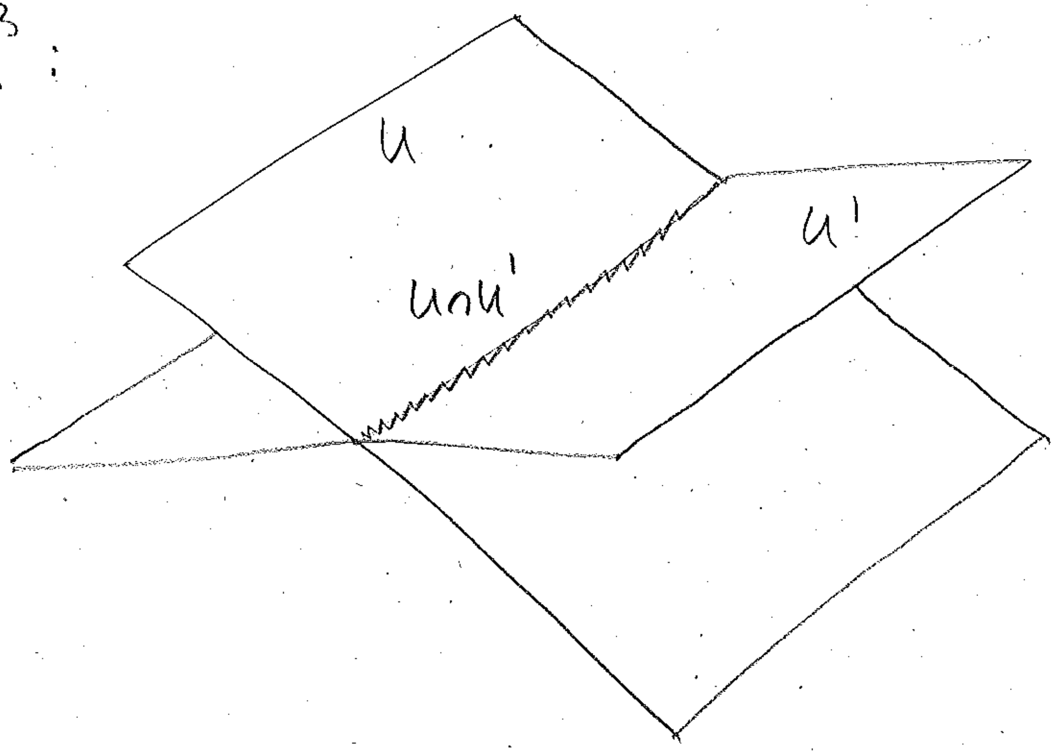
Bsp. 7.22 Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \langle a \rangle$ und $U' = \langle b \rangle$ mit $a = (1,1)$ und $b = (0,1)$. Dann gilt

$$U + U' = \mathbb{R}^2.$$



Wir sehen $U \cap U' = \{0\}$. Außerdem ist
$\dim(U) = \dim(U') = 1$ und $\dim(U) + \dim(U') = 2$.
Dies ist jedoch nicht immer der Fall:

$\mathbb{R}^3$:



Hier gilt $\dim(U) = \dim(U') = 2$ und
$\dim(U) + \dim(U') = 4$, obwohl $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Andererseits ist $\dim(U \cap U') = 1$.
Wie können wir dieses Verhalten von Untervektorräumen genau verstehen?

<u>Theorem 7.23</u> Ist V endlich-dimensional, so gilt für Untervektorräume $U, U' \subset V$:

$$\dim(U) + \dim(U') = \dim(U+U') + \dim(U \cap U')$$

Diese Formel heißt <u>Dimensionsformel</u>.

<u>Beweis</u> Nach Propo. 7.14 gilt, $U \cap U'$, U und U' sind endlich-dimensional.
Wir wählen Basis:

$$a_1, \dots, a_r \in U \cap U' \quad , \quad r = \dim(U \cap U')$$

Nach Basisergänzungssatz ergänzen wir zu Basen

$$a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in U \quad , \quad r+s = \dim(U)$$

$$a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_t \in U' \quad , \quad r+t = \dim(U').$$

Es gilt

$$a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t \in U + U'.$$

Wir zeigen nun, daß dies eine Basis von $U+U'$ ist. Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \dim(U) + \dim(U') &= (r+s)+(r+t) \\ &= 2r+s+t \\ &= (r+s+t)+r \\ &= \dim(U+U') + \dim(U\cap U'). \end{aligned}$$

Daß $\langle a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s,c_1,\dots,c_t\rangle = U+U'$ ist klar, da $y\in U$ und $y'\in U'$ jeweils Linearkombination der Vektoren

$$a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s,c_1,\dots,c_t \qquad (*)$$

sind. Also auch $y+y'$.

Es bleibt zu zeigen, daß $(*)$ linear unabhängig ist. Sei hierfür

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{s}\mu_j b_j + \sum_{\ell=1}^{t}\nu_\ell c_\ell = 0$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{s}\mu_j b_j = -\sum_{\ell=1}^{t}\nu_\ell c_\ell$$

Wir setzen $x = -\sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell c_\ell$ und sehen

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j b_j \in U \quad \text{und}$$

$$-\sum_{\ell=1}^{t} \nu_\ell c_\ell \in U'.$$

Also $x \in U \cap U'$. Da

also $x \in U \cap U'$, insbesondere $x \in U$, schreiben wir $x = \sum_{i=1}^{r} \tilde{\lambda}_i a_i$.

Da $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in U$ linear unabhängig, gilt $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ und

$\mu_j = 0$ für $1 \leq j \leq s$. Vertauscht man Rolle von U und U' folgt $\nu_\ell = 0$ für alle $1 \leq \ell \leq t$. Schließlich folgt $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i = 0$

und da $a_1, \dots, a_r$ linear unabhängig, ergibt sich $\lambda_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$. ∎

Korollar 7.24 Sei V ein Vektorraum und $U, U' \subset V$ Untervektorräume. Ist $\dim(U) + \dim(U') = \dim(V)$, dann

$$U + U' = V \iff U \cap U' = \{0\}$$

Beweis Nach Dimensionsformel gilt

$$\dim(V) = \dim(U+U') + \dim(U \cap U').$$

„$\Rightarrow$" Ist $U + U' = V$, so folgt $\dim(U \cap U') = 0$. Korollar 7.17 zeigt $U \cap U' = \{0\}$.

„$\Leftarrow$" Ist $U \cap U' = \{0\}$, so zeigt Korollar 7.17 $\dim(U \cap U') = 0$. Also $\dim(V) = \dim(U + U')$. Propo. 7.16 zeigt $V = U + U'$.

$\square$

Def 7.25 Sei $U = U + U'$ eine Summe von Untervektorräumen $U, U' \subset V$. Dann heißt U *direkte Summe* von U und U' falls $U \cap U' = \{0\}$. Man schreibt dann $U = U \oplus U'$.

Bemerkung 7.26 Sei $U = U \oplus U' \subset V$. Dann gilt $\dim(U \oplus U') = \dim(U) + \dim(U')$.

Es ist auch möglich direkte Summen von mehr als zwei Untervektorräumen zu bilden.

Propo. 7.27 Eine Summe $U + U' \subset V$ ist direkt, genau dann, wenn sich jeder Vektor $v \in U + U'$ eindeutig als $v = a + b$, $a \in U$, $b \in U'$ schreiben lässt.

Beweis „$\Rightarrow$" $U \oplus U' \subset V$. Dann gilt $U \cap U' = \{0\}$. Sei $v = a + b$ und $v = a' + b'$ mit $a, a' \in U$ und $b, b' \in U'$. Dann gilt

$a+b = a'+b'$, also $a-a' = b'-b$.
Da $a-a' \in U$ und $b'-b \in U'$, folgt
$a-a' \in U \cap U'$, d.h. $a = a'$. Folglich $b = b'$.
Also ist $v = a+b$ eindeutig mit $a \in U, b \in U'$.
„$\Leftarrow$": Sei $v = a+b$ mit eindeutigen $a \in U, b \in U'$.
Sei $x \in U \cap U'$. Dann gilt

$$v = (a+b) + (x-x) = (a+x) + (b-x).$$

Da $a+x \in U$ und $b-x \in U'$ und
$v = a+b$ mit eindeutigen $a \in U, b \in U'$,
folgt $a = a+x$ und $b = b-x$. Also
$x = 0$, d.h. $U \cap U' = \{0\}$.

$\blacksquare$

<u>Def 7.28</u> Eine Summe

$$\sum_{i=1}^{n} U_i := \{ b_1 + \dots + b_n \mid b_i \in U_i \}$$ von

Untervektorräumen $U_i \subset V$ heißt
<u>direkt</u>, falls sich jedes $b \in \sum_{i=1}^{n} U_i$
eindeutig als $b = b_1 + \dots + b_n$ schreiben
lässt.