§7

Endlich-dimensionale Vektorräume

Wir haben gesehen, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt. In der LA I beschäftigen wir uns hauptsächlich mit endlich-dimensionalen.

<u>Def 7.1</u> Ein K-Vektorraum V heißt <u>endlich-dimensional</u>, wenn

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle = V.$$

Man schreibt $\dim_K(V) < \infty$.

<u>Bsp 7.2</u> Der Vektorraum $V = K^n$ ist endlich-dimensional, da

$$\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V.$$

<u>Bsp. 7.3</u> Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist endlich-dimensional. Es ist

$$\langle 1, i \rangle = \mathbb{C}.$$

Ist V endlich-dimensional, so ist

$$\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = V.$$

Proposition 6.10 zeigt, daß man durch Weglassen von Vektoren aus der Menge $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis erhält.
Es stellt sich die Frage, wie viele Vektoren dann eine Basis bilden.
Um diese Frage zu beantworten benötigen wir folgendes Lemma.

<u>Lemma 7.4</u> (Austauschsatz von Steinitz)

Sei $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis und $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ ein Vektor. Für jedes $1 \leq j \leq n$ mit $\lambda_j \neq 0$ ist

$$a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n \in V$$

ebenfalls Basis.

Beweis Wir zeigen

$$a_j \in \langle a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n \rangle \quad (*)$$

Dann folgt $\langle a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n \rangle = V$

Es gilt

$$b - \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i = \lambda_j a_j .$$

Da $\lambda_j \neq 0$ erhalten wir

$$a_j = \frac{1}{\lambda_j} b - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_i \;,$$ also gilt $(*)$.

Wir zeigen nun, daß

$a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n$ linear unabhängig sind. Sei

$$\mu_j b + \sum_{i \neq j} \mu_i a_i = 0 \;,$$

dann müssen wir $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$ zeigen. Da $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ erhalten

wir

$$0 = \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \right) + \sum_{i \neq j} \mu_i a_i$$

$$= \mu_j \lambda_j a_j + \sum_{i \neq j} (\mu_j \lambda_i + \mu_i) a_i$$

Da $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig folgt

$$\mu_j \lambda_j = 0 \quad \text{und} \quad \mu_j \lambda_i + \mu_i = 0$$

Da $\lambda_j \neq 0$ nach Voraussetzung, folgt

$\mu_j = 0$ und schließlich $\mu_i = 0$. ▣

<u>Bemerkung 7.5</u> Ist $a_1, \dots, a_n \in V$ eine Basis, dann gibt es zu jedem $v \in V$ <u>genau</u> <u>ein</u> $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, so daß

$$v = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n .$$

Das sieht man folgendermaßen:

Da $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = V$ kann man jedes $v \in V$ schreiben als

$v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$.

Angenommen

$v = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_n a_n$, so folgt

$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n$.

Also $(\lambda_1 - \mu_1) a_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) a_n = 0$.

Da $a_1, \ldots, a_n$ linear unabhängig, folgt $\lambda_i = \mu_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

<u>Korollar 7.6</u> Sind $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_m$ Basen von V, so gibt es zu jedem a_i ein b_j, so daß aus $a_1, \ldots, a_n$ wieder eine Basis entsteht, wenn a_i durch b_j ersetzt wird.

<u>Beweis</u> Folgt aus Lemma 7.4

<u>Theorem 7.7</u> Sind $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$ Basen von V, so ist $n = m$.

<u>Beweis</u> Angenommen $n \neq m$, $n < m$. Dann könnten durch wiederholtes Anwenden von Korollar 7.6 alle Vektoren $b_1, \dots, b_m$ gegen Vektoren $a_1, \dots, a_n$ ausgetauscht werden. Man erhielte so eine Basis, in der mindestens ein Vektor doppelt vorkommt. Dies widerspricht jedoch der linearen Unabhängigkeit der neuen Basis.

∎

Das Theorem rechtfertigt folgende Definition.

Def 7.8 Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Die Dimension

$$\dim_K(V) \in \mathbb{N}$$

ist die Anzahl der Basisvektoren einer Basis $a_1, \dots, a_n \in V$.

Bsp 7.9 Sei $V = K^n$, so gilt $\dim_K(V) = n$.

Bsp. 7.10 Sei $V = \mathbb{C}$ aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Propo. 7.11 Seien $a_1, \dots, a_n \in V$ eine Basis und $b_1, \dots, b_m$ beliebige Vektoren. Ist $m > n$, so sind $b_1, \dots, b_m$ linear abhängig.

Beweis 1. Fall: es existieren $i,j \in \{1,\dots,m\}$ $i \neq j$, so daß $b_i = b_j$. Dann sind $b_1,\dots,b_m$ offensichtlich linear abhängig.

2. Fall: es existiert ein $i \in \{1,\dots,m\}$, so daß $b_i = 0$. Dann sind die $b_1,\dots,b_m$ linear abhängig.

3. Fall: $b_1,\dots,b_m$ sind alle verschieden und $b_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.
Durch wiederholtes Anwenden von Lemma 7.4 kann man alle Vektoren der Basis $a_1,\dots,a_n \in V$ gegen die Vektoren $b_1,\dots,b_m$ austauschen. Da $m > n$ bleiben also n der Vektoren aus der Menge

$\{b_1,\dots,b_m\}$ eine Basis. Ohne Einschränkung seien dies $b_1,\dots,b_n$. Dann kann b_{n+1} aus $b_1,\dots,b_n$ linearkombiniert werden. ☒

<u>Korollar 7.12</u> Sei V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

$\dim_K(V)=\infty$ genau dann, wenn es eine Folge von Vektoren $a_0, a_1, a_2, \dots \in V$ gibt, welche linear unabhängig sind.

<u>Beweis</u> „$\Rightarrow$" Sei $\dim_K(V)=\infty$. Wir konstruieren unsere Folge rekursiv. Sei $n\geq 0$ und die Folge $a_0,\dots,a_n$ bereits festgelegt. Da $\dim_K(V)=\infty$, folgt

$\langle a_0,\dots,a_n\rangle \subsetneq V$.

Wähle Vektor $a_{n+1} \notin \langle a_0, .., a_n \rangle$.
Aus Lemma 6.10 folgt, daß
$a_0, .., a_n, a_{n+1}$ linear unabhängig sind.

„$\Leftarrow$" Folgt direkt aus Proposition 7.11.

$\boxtimes$

Bsp 7.13 Sei $V = K[T]$. Dann haben wir in Beispiel 6.2 gesehen, daß $a_i = T^i$, $i \in \mathbb{N}$ eine Folge linear unabhängiger Vektoren ist. Korollar 7.12 zeigt $\dim_K(V) = \infty$.

Propo 7.14 Sei V endlich-dimensional. Dann ist jeder Untervektorraum $U \subset V$ auch endlich-dimensional und es gilt $\dim_K(U) \leq \dim_K(V)$.

<u>Beweis</u> Sei $\dim_K(V) = n$ und $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis. Angenommen $\dim_K(U) > n$. Dann gibt es Vektoren $b_1, \ldots, b_{n+1} \in U$, welche linear unabhängig sind. Falls $\dim_K(U) < \infty$ ist das offensichtlich. Falls $\dim_K(U) = \infty$, folgt das aus Korollar 7.12. Aus Proposition 7.11 jedoch folgt, daß $b_1, \ldots, b_{n+1}$ linear unabhängig sein müssen. Dies ist ein Widerspruch zu $\dim_K(V) = n$, also $\dim_K(U) \leq n$.

Bsp 7.15 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt
$\dim_K(U) \in \{0,1,2,3\}$
Die Geraden $U = \langle a \rangle$, $a \neq 0$ haben $\dim_K(U) = 1$.

Wie sehen die Untervektorraum U aus, für die $\dim_K(U) = 0$ oder $\dim_K(U) = 3$?

Propo 7.16 Sei V endlich-dimensional und $U \subset V$ Untervektorraum. Dann gilt:

$$U = V \iff \dim(U) = \dim(V)$$