der Form $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0$ notwendig $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt.

<u>Bsp 6.2</u> Sei $V = K[T]$ der K-Vektorraum der Polynome und $a_i = T^i$, $i \in \mathbb{N}$.
Dann ist das System der Vektoren $a_i \in V$, $i \in \mathbb{N}$ linear unabhängig.

<u>Bsp 6.3</u> $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Dann ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Vektoren $a_1 = 1$ und $a_2 = i$ sind linear unabhängig.

<u>Bemerkung 6.4</u> Ist ein System $a_i \in V$, $i \in I$ <u>nicht</u> linear unabhängig, so sagt man $a_i \in V$ sind <u>linear abhängig</u>.

Def 6.5 Sei V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \;\middle|\; r \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in K,\ a_i \in A \right\}$$

ein Untervektorraum von V.

Man nennt $\langle A \rangle$ den von A erzeugten Untervektorraum in V.

Falls $\langle A \rangle = V$, so sagt man A erzeugt den Vektorraum V.

Prop 6.6 Sei V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Dann gilt

$$\bigcap_{A \subset U} U = \langle A \rangle$$

Folglich ist $\langle A \rangle$ der kleinste Untervektorraum der A enthält.

Beweis

„$\subset$": Der Untervektorraum $\langle A \rangle$ enthält die Menge A. Also gilt

$$\bigcap_{A \subset U} U \subset \langle A \rangle .$$

„$\supset$": Sei $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \in \langle A \rangle$.

Da $a_i \in A \subset U$ und U Untervektorräume sind gilt $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \in U$. Also

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \in \bigcap_{A \subset U} U .$$

$\blacksquare$

Es gelten folgende elementare Eigenschaften:

(i) $\langle \emptyset \rangle = 0$

(ii) $A \subset \langle A \rangle$ für jede Teilmenge $A \subset V$

(iii) $\langle U \rangle = U$ für einen Untervektorraum $U \subset V$.

(iv) $A \subset B$, dann $\langle A \rangle \subset \langle B \rangle$.

<u>Def 6.7</u> Sei V ein K-Vektorraum und $a_i \in V$, $i \in I$ Vektoren. Dann nennt man $a_i \in V$ eine <u>Basis</u> von V, falls

(i) $\langle \{a_i \mid i \in I\} \rangle = V$

(ii) Die Familie $a_i \in V$, $i \in I$ ist linear unabhängig.

<u>Bsp. 6.8</u> Sei $V = K^n$ und $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

die <u>Einheitsvektoren</u>.

Dann ist $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis von V.

Das sieht man folgendermaßen:

(i) Da jeder Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ ⑤

geschrieben werden kann als

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = a$$

folgt $\langle \{ e_i \mid i = 1, .., n \} \rangle = V$.

(ii) Man rechnet leicht nach, daß $e_1, .., e_n$ linear unabhängig sind.

Für $n = 1$ oder $n = 2$ ist es oft leicht nachzurechnen, ob $a_1, .., a_n \in V$ linear unabhängig sind.

Lemma 6.9 Sei $a \in V$ ein Vektor. Dann gilt:

$a \in V$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $a \neq 0$.

Beweis „$\Leftarrow$" Sei $\eta \cdot a = 0$. Nach Propo. 5.7 gilt $\eta = 0$ oder $a = 0$. Da $a \neq 0$ nach Voraussetzung folgt $\eta = 0$.

„$\Rightarrow$" Angenommen $a = 0$. Nehme $\lambda = 1$. Dann gilt $\lambda \cdot a = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit.

$\boxtimes$

Wir haben eben definiert, was eine Basis eines Vektorraums V ist. Wir haben in Beispielen gesehen, daß Basen existieren. Es stellt sich allerdings die Frage, ob jeder Vektorraum eine Basis besitzt.
Um das zu beweisen, benötigen wir folgendes

<u>Lemma 6.10</u> Seien $a_1, \dots, a_n \in V$ linear unabhängig und $b \in V$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt:

$a_1, \dots, a_n, b \in V$ sind linear unabhängig genau dann, wenn
$b \notin \langle \{a_1, \dots, a_n\} \rangle$.

Beweis

„⇒" Angenommen $b \in \langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle$.
Dann ist

$$b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \quad , \text{ also}$$

$$1 \cdot b + (-\lambda_1) a_1 + \cdots + (-\lambda_n) a_n = 0 .$$

Sind $a_1, \ldots, a_n, b \in V$ linear unabhängig, so folgt $1 = 0$ in K. Dies ist ein Widerspruch.

„⇐" Sei $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1} \cdot b = 0$.

Angenommen $\lambda_{n+1} \neq 0$. Dann ist

$$b = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}\right) a_1 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) a_n .$$

Dies ist Widerspruch zur Voraussetzung $b \notin \langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle$. Also folgt $\lambda_{n+1} = 0$.

Dann ist aber

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 .$$

Da $a_1, \ldots, a_n \in V$ linear unabhängig, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$.

$\boxed{\text{q.e.d.}}$

Außerdem benötigen wir folgende

<u>Propo. 6.11</u> Ist $a_i \in V$, $i \in I$ ein Erzeugendensystem, so gibt es eine Teilmenge $J \subset I$, so daß $a_j \in V$, $j \in J$ eine Basis bilden.

<u>Beweis</u>: Einfachheitshalber nehmen wir an, daß $I = \mathbb{N}$.

Nun bilden wir die Teilmenge

$$J = \{ j \in I \mid a_j \notin \langle a_0, \dots, a_{j-1} \rangle \}.$$

Wir werden zeigen, daß a_j, $j \in J$ eine Basis bilden.

Sei $U = \langle \{ a_j \mid j \in J \} \rangle$. Wir zeigen zunächst $U = V$. Dafür müssen wir beweisen, daß $a_i \in U$, $i \in I$.

Betrachten wir nun die Menge

$$L = \{ i \in I \mid a_i \notin U \}.$$

Sei $m \in L$ das kleinste Element. Dann gilt $a_0, \dots, a_{m-1} \in U$ aber $a_m \notin U$.

Dann gilt

$$\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle \subset U \quad \text{aber}$$

$a_m \notin \langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle$. Also ist $m \in J$.

Dann gilt aber $a_m \in U$. Dies ist ein Widerspruch, also $L = \emptyset$.

Wir zeigen nun, daß $a_j, j \in J$ linear unabhängig sind. Wir betrachten

$$\sum_{j \in M} \lambda_j a_j = 0$$

und $M = \{ j \in J \mid \lambda_j \neq 0 \}$

Nach Definition von Linearkombination sind diese Mengen M endlich.

Da $J \subset I = \mathbb{N}$ und M endlich, existiert ein größtes Element $n \in M$. Dann gilt

$$a_n = -\frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_{\substack{j \in M \\ j \neq n}} \lambda_j a_j \in \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$$

Also ist $n \notin J$ und somit $n \notin M$.
Dies bedeutet $M = \emptyset$.

∎

Theorem 6.12 Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweis. Sei V ein K-Vektorraum. Dann existiert immer ein Erzeugendensystem $a_i \in V$, $i \in I$. Man kann dafür die Familie aller Vektoren aus V nehmen.
Die Aussage folgt jetzt aus Proposition 6.11

∎

Bemerkung 6.13

Der Beweis von Proposition 6.11 und somit von Theorem 6.12 basiert auf der Annahme $I = \mathbb{N}$. Einen Beweis kann man auch für beliebige Indexmengen I durchführen. Man muss auf I eine Wohlordnung wählen. Das stellt sicher, daß jede nicht-leere Teilmenge $J \subset I$ ein kleinstes Element besitzt. Ein Axiom aus der Mengentheorie stellt die Existenz solcher Wohlordnungen sicher.

Bemerkung 6.14

Theorem 6.12 ist eine Existenzaussage. Es gibt uns keine Möglichkeit an die Hand, Basen einfach hinzuschreiben. Beispielsweise kann man keine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-VR hinschreiben.