Bsp 5.2 Standardvektorraum

$V = K^n$, $n \geq 0$.
Vektoraddition ist gegeben durch

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\alpha_1', \dots, \alpha_n') = (\alpha_1 + \alpha_1', \dots, \alpha_n + \alpha_n'),$$

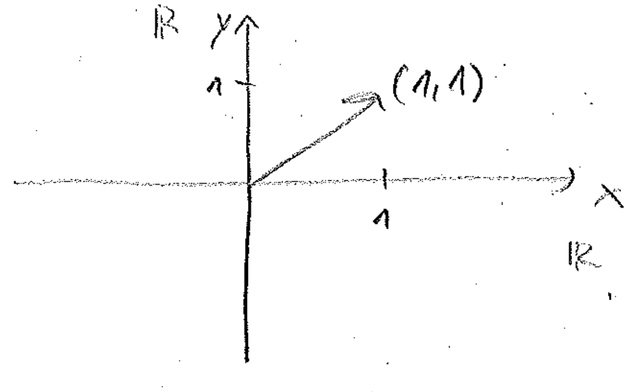
Skalarmultiplikation durch

$$\lambda \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n)$$

Bsp 5.3: Die Lösungsmenge $L \subset K^n$ eines LGS $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = 0$, $1 \leq i \leq m$.

Vektoraddition und Skalarmultiplikation ist gegeben wie in Bsp. 5.2

Bsp 5.4 $K = \mathbb{R}$. Dann ist $V = \mathbb{R}^2$ das bekannte Koordinatensystem



<u>Bemerkung</u> Im Standardvektorraum $V = K^n$ schreibt man die Vektoren

$a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ auch so:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

<u>Bsp 5.5</u> Sei K ein Körper.

Ein <u>Polynom über K</u> ist ein formaler Ausdruck der Gestalt $p(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$, wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$. Man bezeichnet die Menge aller solcher Polynome mit $K[T]$. Auf dieser Menge hat man Addition:

Sei ohne Einschränkung $m > n$ und

$$p(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n \quad \text{und}$$

$$q(T) = b_0 + b_1 T + \dots + b_n T^n + b_{n+1} T^{n+1} + \dots + b_m T^m.$$

Dann ist

$$p(T) + q(T) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)T + \dots + (a_n+b_n)T^n + b_{n+1}T^{n+1} + \dots + b_m T^m.$$

Mit dieser Addition wird $(K[T],+)$ zu einer kommutativen Gruppe. Neutrales Element ist das <u>Nullpolynom</u> $p(T) = 0$.

Sei $\lambda \in K$ und $p(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$ ein Polynom. Dann definiert

$$\lambda \cdot p(T) = \lambda a_0 + \lambda a_1 T + \dots + \lambda a_n T^n$$

eine Skalarmultiplikation. Man prüft leicht nach, daß $K[T]$ mit obiger Addition und Skalarmultiplikation zu einem K-Vektorraum wird.

Zur besseren Unterscheidung schreiben wir $0_V \in V$ für den Nullvektor und $0_K \in K$ für das Nullelement des Körpers.

<u>Propo 5.6</u> In jedem K-Vektorraum V gilt:

(i) $0_K \cdot a = 0_V$

(ii) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

(iii) $(-1) \cdot a = -a$

für alle $a \in V$.

Beweis zu (i):

$$0_K \cdot a + a = 0_K \cdot a + 1 \cdot a$$
$$= (0_K + 1) \cdot a = 1 \cdot a = a$$

Auf beiden Seiten $-a$ addieren ergibt

$$0_K \cdot a = 0.$$

zu (ii):

$$\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V - (\lambda \cdot 0_V)$$
$$= \lambda \cdot (0_V + 0_V) - (\lambda \cdot 0_V) = \lambda \cdot 0_V - \lambda \cdot 0_V$$
$$= 0_V$$

zu (iii)

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a$$
$$= 0_K \cdot a \underset{(i)}{=} 0_V$$

Also $-a = (-1) \cdot a$. ☐

<u>Propo 5.7</u> Sei V ein K-Vektorraum und $\lambda \in K$ und $a \in V$. Wenn $\lambda \cdot a = 0_V$, so muss $\lambda = 0_K$ oder $a = 0_V$.

<u>Beweis</u> klar.

<u>Def 5.8</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt <u>Untervektorraum</u>, wenn gilt:

(i) $0_V \in U$

(ii) Sind $a, b \in U$, so auch $a+b \in U$.

(iii) Sind $\lambda \in K$ und $a \in U$, so ist $\lambda \cdot a \in U$.

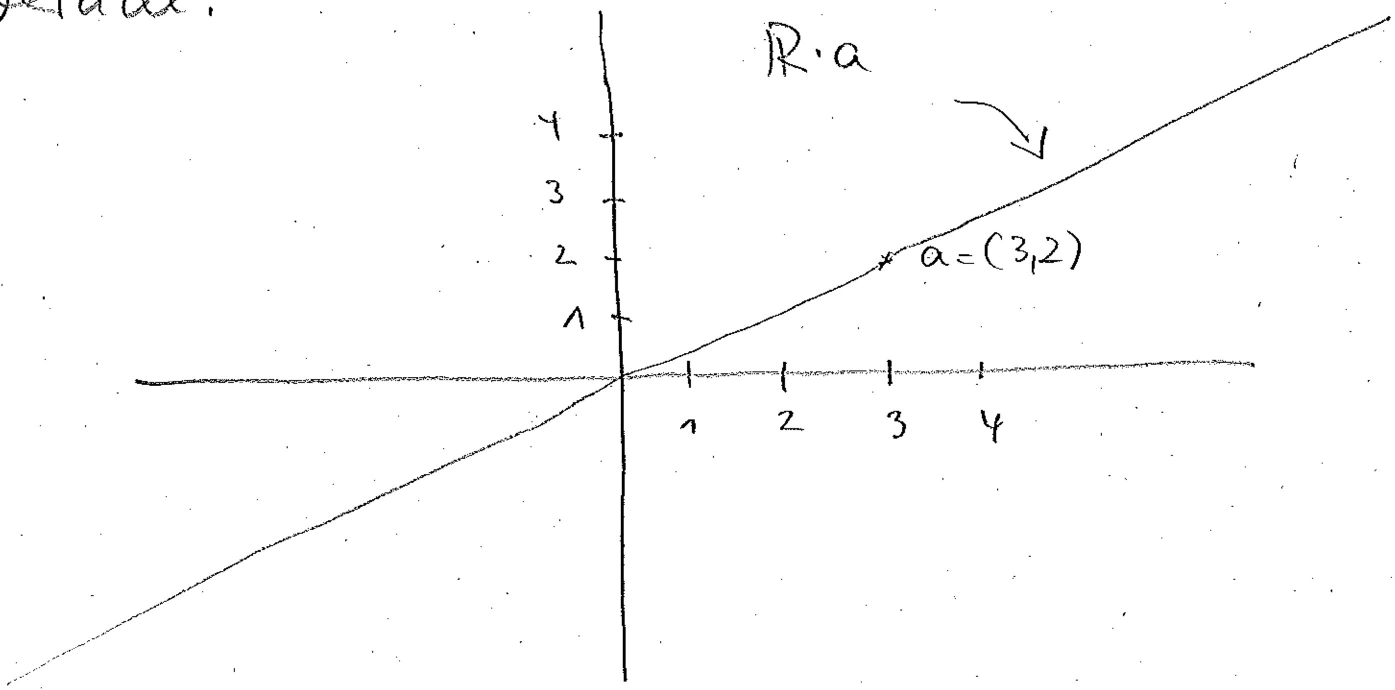
<u>Bsp 5.9</u> (Geraden).

Für einen Vektor $a \in V$ ist die Menge

$$K \cdot a := \{ \lambda \cdot a \mid \lambda \in K \}$$

ein Untervektorraum von V. Im Falle $a \neq 0$ nennt man $K \cdot a$ eine <u>Gerade</u>.

Ist $V = \mathbb{R}^2$ und $a = (3,2) \in V$, so ist $\mathbb{R} \cdot a = \{(\lambda 3, \lambda 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ folgende Gerade:



<u>Lemma 5.10</u> Sei V ein K-Vektorraum. Eine nicht-leere Teilmenge $U \subset V$ ist ein Untervektorraum genau dann, wenn für alle $a, b \in U$ und $\lambda \in K$ auch $a + \lambda \cdot b \in U$.

<u>Beweis</u> Wenn U ein Untervektorraum ist, so gilt für alle $a, b \in U$ und $\lambda \in K$ trivialerweise $a + \lambda b \in U$.

Seien $a, b \in U$ und $\lambda \in K$ mit $a + \lambda b \in U$.
Wir müssen die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus der Definition nachprüfen.

zu (i): Da $U \neq \emptyset$ gibt es ein $b \in U$.
Für $a = b$ und $\lambda = -1$ gilt
$a + \lambda \cdot b = b + (-1) \cdot b = 0_V \in U$.

zu (ii): Seien $a, b \in U$ und $\lambda = 1$.
Dann gilt $a + 1 \cdot b = a + b \in U$.

zu (iii): Da nach (i) $0_V \in U$ folgt mit
$a = 0_V$, $b \in U$, $\lambda \in K$ gerade
$a + \lambda \cdot b = \lambda \cdot b \in U$.

Weitere Beispiele von Untervektorräumen:

<u>Bsp. 5.11</u> Sei $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen auf $\mathbb{R}$.
Vektoraddition ist gegeben durch
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
Skalarmultiplikation

ist gegeben durch

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

Sei $U = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0 \}$. Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum.

Bsp. 5.12 Sei L ein Körper. Eine Teilmenge $K \subset L$ heißt Unterkörper, falls

(i) $\lambda, \mu \in K$, so auch $\lambda + \mu, \lambda \cdot \mu \in K$

(ii) $\lambda \in K$, so auch $-\lambda \in K$

(iii) $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, so auch $\lambda^{-1} \in K$

(iv) $0, 1 \in K$.

Dann ist L ein K-Vektorraum und $K \subset L$ ein Untervektorraum.

Bsp. 5.13 Sei $V = K[T]$. Mit Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot p(T) = \lambda \cdot (a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n)$$
$$= \lambda \cdot a_0 + \lambda a_1 T + \dots + \lambda a_n T^n$$

wird $K[T]$ zu einem K-Vektorraum.

Sei $p(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$ und $a_n \neq 0$, so nennt man n den Grad von $P(T)$ und schreibt $\deg(P) = n$.
Für das Nullpolynom $p(T) = 0$ setzt man $\deg(P) = -\infty$. Sei nun $d > 0$ fest und

$$U = \{ P \in K[T] \mid \deg(P) \leq d \}.$$

Dann ist $U \subset V$ ein Untervektorraum.

Propo. 5.14 Sei V ein Vektorraum, $U_i \subset V$, $i \in I$ Untervektorräume. Dann ist

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i \subset V$$

ein Untervektorraum.

Beweis Wir müssen zeigen, daß für $a, b \in U$, $\lambda \in K$ auch $a + \lambda b \in U$.

Für $b \in U$ gilt $b \in U_i$ für alle $i \in I$. Da U_i Untervektorraum, folgt $\lambda b \in U_i$ für alle $i \in I$. Da $a \in U$, folgt $a \in U_i$ für alle $i \in I$. Also sind $a, \lambda b \in U_i$ für alle $i \in I$.

Aus Lemma 5.10 folgt

$$a + \lambda b \in U_i \text{ für alle}$$

$i \in I$. Insgesamt gilt also

$$a + \lambda b \in U.$$

$\square$

§ 6
Linearkombination und Basen

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sind $a_1, \dots, a_r \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, so nennt man

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i \in V$$

eine <u>Linearkombination</u> der Vektoren $a_1, \dots, a_r \in V$.

<u>Def 6.1</u> Ein System von Vektoren $a_1, \dots, a_n$ eines K-Vektorraums V heißt <u>linear unabhängig</u>, wenn aus einer Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \quad , \quad \lambda_i \in K$$

notwendig $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ folgt.

In obiger Definition ist lineare Unabhängigkeit für endliche Systeme von Vektoren formuliert. Der Begriff überträgt sich auch auf beliebige Systeme.

Sei nun $a_i \in V$, $i \in I$ beliebige Familie von Vektoren und $\lambda_i \in K$, $i \in I$ Skalare. Eine Linearkombination der a_i ist Ausdruck der Form

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i \quad , \quad \lambda_i \in K$$

wobei die $\lambda_i \in K$ für fast alle $i \in I$ verschwinden.

Man bezeichnet dann ein System a_i, $i \in I$ von Vektoren aus V als linear unabhängig, wenn aus dem Verschwinden einer Linear-kombination der a_i, also einer Gleichung der Form $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0$ notwendig $\lambda_i = 0$ für alle $i \in I$ folgt.

<u>Bsp 6.2</u> Sei $V = K[T]$ der K-Vektorraum der Polynome und $a_i = T^i$, $i \in \mathbb{N}$.
Dann ist das System der Vektoren $a_i \in V$, $i \in \mathbb{N}$ linear unabhängig.

<u>Bsp 6.3</u> $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Dann ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Die Vektoren $a_1 = 1$ und $a_2 = i$ sind linear unabhängig.

<u>Bemerkung 6.4</u> Ist ein System $a_i \in V$, $i \in I$ <u>nicht</u> linear unabhängig, so sagt man $a_i \in V$ sind <u>linear abhängig</u>.