Bsp 2.18 Die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto a+1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto \begin{cases} a, & a \text{ ungerade} \\ \frac{a}{2}, & a \text{ gerade} \end{cases}$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in Y$ genau ein $a \in X$ mit $f(a) = b$. In diesem Fall existiert also eine Umkehrabbildung

$$f^{-1}: Y \to X, \quad b \mapsto a \quad \text{mit } b = f(a).$$

Man schreibt dann $b \mapsto f^{-1}(b)$.

Bsp 2.19 Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a+5$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a-5$.

Eine Menge $X$ heißt endlich, falls $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, d.h. falls sie nur endlich viele Elemente besitzt.

**Propos. 2.20** Sind $X$ und $Y$ endliche Mengen mit gleich vielen Elementen $n$, so sind für eine Abbildung $f : X \to Y$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f$ ist injektiv

(ii) $f$ ist surjektiv

(iii) $f$ ist bijektiv

**Beweis** $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen $a_i$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen $f$ ist nicht surjektiv. Dann besteht $f(X)$ aus $m < n$ Elementen. Also existieren $a_i, a_j \in X$ $i \neq j$, mit $f(a_i) = f(a_j)$. Also nicht injektiv.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen $f$ ist nicht injektiv. Dann existieren $a_i, a_j \in X$, $i \neq j$ mit $f(a_i) = f(a_j)$. Dann kann $f(X)$ höchstens $n-1$ Elemente besitzen. Also ist $f$ nicht surjektiv.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) klar.

Die Aussage von Satz 1 wird falsch, wenn man Mengen mit unendlich vielen verschiedenen Elementen betrachtet.

Bsp 2.21 $X = \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto a+1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv und somit auch nicht bijektiv.

Sind $X, Y, Z$ Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen, so heißt die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

die Komposition von $f$ und $g$.

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ können durch Axiome beschrieben werden (Peano-Axiome). John von Neumann gab eine Möglichkeit die natürlichen Zahlen durch Mengen darzustellen:

$0 := \emptyset$

$1 := \{\emptyset\}$

$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

$n+1 := n \cup \{n\}$

Wir werden später sehen, wie man aus $\mathbb{N}$ die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und wie man aus diesen wiederum $\mathbb{Q}$ erhält.

Dies geschieht dann mittels Äquivalenzrelationen.

Aussagen über natürliche Zahlen lassen sich mit der Methode der vollständigen Induktion beweisen.

Propo. 2.22 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine Aussage. Wir nehmen an, daß wir folgendes zeigen können:

(i) Die Aussage $A(0)$ gilt

(ii) Wenn $A(n)$ gilt, so gilt auch $A(n+1)$.

Dann gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $S$ die Menge der natürlichen Zahlen für die die Aussage nicht gilt. Nehmen an $S \neq \emptyset$. Dann existiert ein kleinstes Element $n_0 \in S$. Dann ist $n_0 \neq 0$ wegen (i). Dann gilt die Aussage jedoch für $n_0 - 1$. Wegen (ii) gilt dann die Aussage auch für $n_0$.

Dies ist ein Widerspruch.

<u>Bemerkung 2.23</u> Das Prinzip der vollständigen Induktion funktioniert auch, wenn man (i) und (ii) ersetzt durch:

(i)' Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Die Aussage $A(k)$ gilt

(ii)'' Wenn $A(n)$ für $n \geq k$ gilt, so gilt auch $A(n+1)$.

<u>Bsp 2.24</u> $$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Hier ist die Formel $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ die Aussage $A(n)$.

(i) Wir müssen zeigen, daß $A(0)$ gilt. Man nennt (i) auch den <u>Induktionsanfang</u>.

Also zu zeigen ist:

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2} = 0$$

Dies ist also klar.

(ii) Wir müssen nun zeigen, daß aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt. Dies nennt man auch Induktionsschritt. Wir nehmen also an, daß $A(n)$ gilt:

Also $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Aussage $A(n+1)$ lautet:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Diese ist aus $A(n)$ zu folgern:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right) + (n+1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A(n) \text{ gilt}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Also haben wir aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ gefolgert.

**Bsp 2.25** Sei $f: \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ eine Abbildung, so daß $f(n+m) = f(n) \cdot f(m)$. Setze $a = f(1)$, so gilt $f(n) = a^n$.

Hier ist die Aussage $A(n)$ die Gleichung $f(n) = a^n$.

Induktionsanfang: $A(1)$:
$f(1) = a^1 = a$. Dies ist trivialerweise erfüllt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, daß $f(n) = a^n$ und müssen zeigen, daß $f(n+1) = a^{n+1}$.

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(1) \underset{\substack{A(n)\\ \text{gilt}}}{=} a^n \cdot a = a^{n+1}.$$

# § 3
## Gruppen und Ringe

Wir kommen nun zu den Begriffen Gruppe und Ring und nähern uns so der Vorstellung, was wir später unter „Zahlenmengen" verstehen werden.

Unter einer Verknüpfung auf einer Menge $G$ verstehen wir eine Abbildung $f: G \times G \to G$. Sie ordnet jedem Paar $(a,b) \in G \times G$ ein Element $f(a,b) \in G$ zu.

**Def 3.1** Eine Menge $G$ mit einer Verknüpfung $*: G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto *(a,b) =: a*b$ heißt Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(G1) Assoziativität: Für alle $a,b,c \in G$ gilt
$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

(G2) Existenz eines neutralen Elements: Es existiert ein Element $e \in G$, so daß $e*a = a*e = a$ für alle $a \in G$. Das Element $e$ heißt neutrales Element

(G3) Inverses Element: Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $a * b = b * a = e$. Das Element $b$ heißt Inverses zu $a$.

Eine Gruppe $G$ heißt kommutativ (oder abelsch), falls für alle $a, b \in G$ zusätzlich $a * b = b * a$ gilt.

Propo 3.2 Sei $G$ eine Gruppe und $e, e'$ zwei neutrale Elemente, so gilt $e = e'$

Beweis Nach (G2) gilt $a = a * e$ und $e' * b = b$ für alle $a, b \in G$. Für $a = e'$ und $b = e$ folgt

$$e' = e' * e = e.$$

Propo 3.3 Sei $G$ eine Gruppe und $a \in G$. Seien $b$ und $b'$ zwei Inverse zu $a$, so gilt $b = b'$

Beweis Übungsblatt.