§2
Mengen und Abbildungen

Wir benutzen Cantor's intuitive Sichtweise, um über Mengen zu sprechen. Eine exakte Axiomatisierung der Mengentheorie ist z.B. durch die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom gegeben.

Unter einer <u>Menge</u> X verstehen wir eine Zusammenfassung gewisser Dinge a, genannt <u>Elemente</u> der Menge X. Eine Menge X ist in eindeutiger Weise durch ihre Elemente festgelegt.

Ist a ein Element der Menge X, so schreibt man, $a \in X$. Falls a kein Element von X ist, so schreibt man $a \notin X$.

Man kennzeichnet eine Menge X dadurch, daß man ihre Elemente in geschweiften Klammern $\{\ldots\}$ schreibt.

<u>Bsp 2.1</u> $X = \{0, \pi, 3\}$ hat 3 Elemente:

$$0 \in X, \quad \pi \in X, \quad 3 \in X, \quad 1 \notin X.$$

Elemente die man nicht nennt kann man durch Punkte andeuten:

<u>Bsp 2.2</u> $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Ist E eine Eigenschaft, die jedes Element a einer Menge X hat, so bezeichnet

$$\{a \in X \mid a \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

die Menge aller Elemente von X mit Eigenschaft E.

<u>Bsp 2.3</u> $\mathbb{N} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ nicht negativ}\}$

Dies führt zum natürlichen Begriff der <u>Teilmenge</u>.

<u>Def 2.4</u> Seien X und Y zwei Mengen. Wir schreiben $X \subset Y$ und sagen, daß X eine <u>Teilmenge</u> von Y ist, falls für jedes $a \in X$ auch $a \in Y$ gilt.

Bsp 2.5

$$\{0, 1, \pi\} \subset \mathbb{R}, \quad \{0, 1\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

Die leere Menge $\emptyset = \{\ \}$ hat kein einziges Element. Für alle a gilt $a \notin \emptyset$. Für alle Mengen X gilt jedoch $\emptyset \subset X$.

Def 2.6 Seien X und Y zwei Mengen. Wir schreiben $X = Y$ und sagen, daß die Mengen X und Y gleich sind, falls

$$X \subset Y \quad \text{und} \quad Y \subset X.$$

Bemerkung 2.7 Bei Mengen kommt es in der Auflistung der Elemente nicht auf die Reihenfolge oder Wiederholungen an. Beispielsweise sind

$$X = \{1, 0, 1\} \quad \text{und} \quad Y = \{1, 0\}$$

gleich.

Man kann aus gegebenen Mengen neue Mengen konstruieren.

<u>Def 2.8</u> Seien X und Y zwei Mengen.
Die <u>Vereinigung</u> von X und Y ist die Menge
$$X \cup Y = \{a \mid a \in X \text{ oder } a \in Y\}$$

<u>Def 2.9</u> Seien X und Y zwei Mengen.
Der <u>Durchschnitt</u> von X und Y ist die Menge
$$X \cap Y = \{a \mid a \in X \text{ und } a \in Y\}$$

<u>Bsp 2.10</u> $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Man nennt zwei Mengen X und Y <u>disjunkt</u>, wenn $X \cap Y = \emptyset$.
Manchmal wird es nötig sein Vereinigungen und Durchschnitte von mehr als endlich vielen Mengen zu betrachten. Dann verwendet man eine Menge I, die <u>Indexmenge</u>, und betrachtet die Mengen X_i, $i \in I$.
Dann ist
$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{a \mid \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } a \in X_i\}$$

die Vereinigung der Mengen X_i und

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{ a \mid a \in X_i \text{ für alle } i \in I \}$$

der Durchschnitt der Mengen X_i.

<u>Bsp 2.11</u> $I = \mathbb{N}$ und $X_i = [-i, i] \subset \mathbb{R}$ Intervalle.

Dann gilt

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} X_i = \{0\}.$$

<u>Def 2.12</u> Seien X und Y Mengen. Die <u>Komplementärmenge</u> von X und Y ist die Menge

$$X \setminus Y = \{ a \mid a \in X \text{ und } a \notin Y \}.$$

<u>Def 2.13</u> Seien $X_1, \ldots, X_n$ Mengen. Dann heißt

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in X_i \}$$

das <u>kartesische Produkt</u> der Mengen $X_1, \ldots, X_n$.

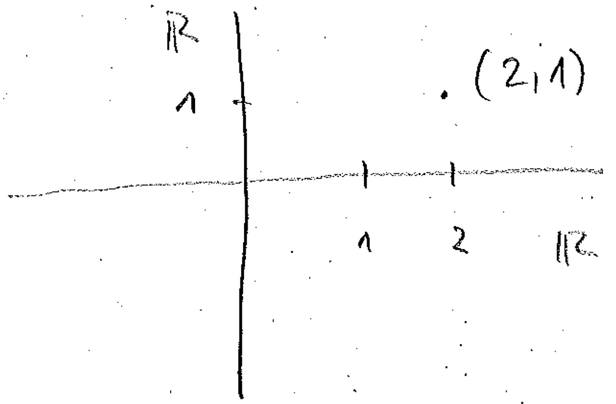
Die Elemente $(a_1, \dots, a_n)$ heißen _n-Tupel_ und es gilt $(a_1, \dots, a_n) = (a_1', \dots, a_n')$ genau dann, wenn $a_i = a_i'$ für $i = 1, \dots, n$.

Bsp 2.14 X, Y zwei Mengen. Dann ist

$$X \times Y = \{(a,b) \mid a \in X,\ b \in Y\}.$$

Hierbei ist $(a,b) = (a',b') \underset{\text{genau dann}}{\Leftrightarrow} a = a'$ und $b = b'$.

Für $X = Y = \mathbb{R}$ erhält man



das Koordinatensystem mit reellen Koordinaten.

Als nächstes kommen wir auf den Begriff der Abbildung zwischen Mengen zu sprechen.

__Def 2.15__ Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Vorschrift, welche jedem $a \in X$ genau ein $b \in Y$ zuordnet. Man schreibt $b = f(a)$ und $a \mapsto f(a)$. Dabei heißt X der __Definitionsbereich__ und Y der __Wertebereich__ der Abbildung f.

Zwei Abbildungen $f: X \to Y$ und $g: X \to Y$ heißen __gleich__ und man schreibt $f = g$, wenn $f(a) = g(a)$ für alle $a \in X$.

__Bsp 2.16__ $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^2$ oder

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bei Abbildungen ist es wichtig auch Definitionsbereich und Wertebereich anzugeben.
So sind $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $a \mapsto a^3$ und $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^3$ verschieden, obwohl beide die gleiche Vorschrift $a \mapsto a^3$ besitzen.

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine Teilmenge. Die Menge

$$f(A) = \{ b \in Y \mid \text{es gibt ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b \}$$

heißt das Bild von A. Es ist $f(A) \subset Y$.

Ist $B \subset Y$ eine Teilmenge, so heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{ a \in X \mid f(a) \in B \} \subset X$$

das Urbild von B.

Besonders wichtige Eigenschaften von Abbildungen haben eigene Namen.

Def 2.17 Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(i) injektiv, falls aus $a, a' \in X$ und $f(a) = f(a')$ stets $a = a'$ folgt.

(ii) surjektiv, falls es zu jedem $b \in Y$ mindestens ein $a \in X$ gibt mit $f(a) = b$.

(iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

<u>Bsp 2.18</u> Die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto a+1$ ist injektiv, aber <u>nicht</u> surjektiv.

Die Abbildung $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $a \mapsto \begin{cases} a, & a \text{ ungerade} \\ \frac{a}{2}, & a \text{ gerade} \end{cases}$ ist surjektiv, aber <u>nicht</u> injektiv.

Ist $f: X \to Y$ bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in Y$ genau ein $a \in X$ mit $f(a) = b$. In diesem Fall existiert also eine <u>Umkehrabbildung</u>

$$f^{-1}: Y \to X, \quad b \mapsto a \quad \text{mit } b = f(a).$$

Man schreibt dann $b \mapsto f^{-1}(b)$.

<u>Bsp 2.19</u> Die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a+5$ ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a-5$.

Eine Menge X heißt endlich, falls $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, d.h. falls sie nur endlich viele Elemente besitzt.