§1
Einführung

Die Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik.
Sie beschäftigt sich mit speziellen Strukturen wie Gruppen, Ringen oder Körpern und deren Verknüpfungen.

Ein fundamentales Problem ist das Lösen von algebraischen Gleichungen z.B.

$$(*) \quad aX^2 + bX + c = 0.$$

Hierbei ist X eine Unbestimmte oder Variable und a, b, c „Zahlen".

Die Lösungsmenge ist:

$$L = \{\alpha \text{ „Zahl"} \mid a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\}$$

Frage 1) Wie kann man L bestimmen?

Frage 2) Was genau versteht man unter „Zahlen"?

Frage 3) Was verstehen wir unter einer Menge?

Idee: Quadratische Ergänzung:

$$a x^2 + b x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right)$$

Hier muss man ausklammern können und dividieren.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

Wir sehen $a x^2 + b x + c = 0$, falls

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Man nennt $\Delta := b^2 - 4ac$ die Diskriminante der Gleichung $a x^2 + b x + c$.

Zu Frage 1)

⊗ Wenn wir L bestimmen wollen, müssen wir annehmen, daß $2a \neq 0$. Es gibt tatsächlich „Zahlen", wo $2a = 0$.

Dann gilt:

(*) hat Lösung genau dann, wenn Δ ein Quadrat ist, d.h., wenn eine „Zahl" s existiert mit $s^2 = \Delta$.

Das sieht man wie folgt:

(i) Sei α eine Lösung von (*). Dann gilt

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0.$$

Also folgt

$$\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\Delta}{(2a)^2}.$$

Mit anderen Worten

$$\Delta = \left(2a\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)\right)^2, \text{ d.h.}$$

mit $s = 2a\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)$ gilt $s^2 = \Delta$.

(ii) Sei umgekehrt Δ ein Quadrat, d.h. es gibt „Zahl" s mit $s^2 = \Delta$, so setzen wir

$\alpha = \frac{s-b}{2a}$ und erhalten:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = a\left(\frac{s-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{s-b}{2a}\right) + c$$
$$= \frac{1}{4a}\left(s^2 + (4ac-b^2)\right) = 0$$

Da nun s und $-s$ die einzigen „Zahlen" sind mit $s^2 = \Delta$ und $(-s)^2 = \Delta$ folgt:

$$L = \left\{ \frac{s-b}{2a}, \frac{-s-b}{2a} \right\}.$$

Zu Frage 2)

Wir kennen bereits „Zahlen". z.B.:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen. ($\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq 0\}$ Menge der rationalen Zahlen.

$$\mathbb{R} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n} z_i 10^i \;\middle|\; z_i \in \{0,\dots,9\} \text{ und } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Menge der reellen Zahlen. Werden in Analysis genauer behandelt.
Wir werden später genau erklären, was genau wir unter „Zahlen" verstehen.

Wir verstehen nun wie quadratische Gleichungen

$$aX^2 + bX + c = 0$$

gelöst werden.

In der Algebra-Vorlesung geht es unter anderem darum, wie die Lösungsmenge von Gleichungen der Form

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad n \geq 3$$

bestimmt werden kann.
In der algebraischen Geometrie geht es dann darum die Lösungsmenge von

Zb:

$$x^2 + y^3 - z = 0$$
$$-yz^2 + 3x^3 + 2xy = 0$$

zu verstehen.
Wir in der linearen Algebra beschäftigen uns zunächst mit linearen Gleichungssystemen (LGS) der Form:

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \cdots + a_{1n} X_n &= 0 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \cdots + a_{2n} X_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \cdots + a_{mn} X_n &= 0 , \end{aligned} \quad (*)$$

also $m \geq 0$ Gleichungen in $n \geq 0$ Unbestimmten.

Bsp.

$$\begin{aligned} aX + bY &= 0 \\ cX + dY &= 0 \end{aligned} \quad (**) \qquad m = n = 2.$$

1. Fall: $a = b = c = d = 0$, so sind alle $X = \alpha$, $Y = \beta$ „Zahlen"

Lösungen.

2 Fall: $a \neq 0$. Wenn man bei unseren „Zahlen" das $\frac{c}{a}$-fache der 1. Gleichung von der 2. Gleichung subtrahiert erhält man:

$$ax + by = 0$$
$$\left(\frac{ad-bc}{a}\right)y = 0$$

Da $a \neq 0$, folgt für $ad-bc \neq 0$ gerade $y = 0$ und somit $x = 0$.

Ist $ad-bc = 0$, so folgt $y = \beta$ beliebige „Zahl" und $x = -\frac{b\beta}{a}$.

Wir sehen also, wie man das LGS

$$ax + by = 0$$
$$cx + dy = 0$$

lösen könnte. Dafür müsste man in unseren „Zahlen" zum Beispiel folgende

Rechenoperationen durchführen können:

- Dividieren
- subtrahieren, addieren
- multiplizieren
- ausklammern / ausmultiplizieren
- es müsste $a(b+c) = ab + ac$ gelten

etc.

In $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ kann man diese Rechenoperationen durchführen. In $\mathbb{Z}$ nicht, da man nicht immer dividieren kann.

Um zu klären, was genau wir unter „Zahlen" verstehen werden, müssen wir zunächst klären, was für uns Mengen sind. (Frage 3)).