Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Präsenzübungen zur Besprechung am 23./24. April

Aufgabe 1. Auf einer einsamen Insel in der Nordsee stehen drei Häuser nebeneinander, die jeweils einen Bewohner haben. Die Häuser sind in drei verschiedenen Farben angestrichen und die Bewohner haben jeweils drei verschiedene Nationalitäten, Haustiere und Lieblingsgetränke:

Nationalitäten: Brite, Norweger, Schwede
Haustiere: Fisch, Hund, Katze
Lieblingsgetränke: Bier, Kaffee, Tee
Hausfarben: Blau, Gelb, Rot

Weiterhin haben wir folgende Informationen:

1. Das blaue Haus gehört dem Briten, der Bier trinkt.
2. Der Katzen- und der Fischbesitzer sind nicht benachbart.
3. Der Schwede trinkt Tee.
4. Die Katze wohnt im gelben Haus.
5. Der Norweger wohnt rechts (nicht notwendig benachbart) vom Briten und hat keinen Hund.
6. Das rote Haus steht nicht in der Mitte.

a) Entscheide, welche Farbe das Haus des Fischbesitzers hat.

b) Entscheide, wo der Brite wohnt.

c) Zeige, dass es nur mit obigen Axiomen nicht möglich ist zu entscheiden, welches Haustier der Schwede hat.

Aufgabe 2. Diskutiere die folgende Aussage und ihren Beweis:

"Satz": Für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}.$$

Beweis: Man quadriere die Gleichung und multipliziere das Ergebnis mit 4, um

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

zu erhalten. Zieht man auf beiden Seiten $4xy$ ab, so erhält man

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0.$$

Letzteres ist immer erfüllt, also ist die Aussage bewiesen. $\square$

Aufgabe 3.

a) Drücke die folgenden Aussagen in Worten aus und, falls eine Aussage falsch sein sollte, ersetze sie dabei durch ihre Negation.

(i) $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : m = n + n$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : m > n \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : m = n + l$

(iii) $\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : (m \neq n) \wedge (m^n = n^m)$

b) Drücke die folgende Aussage in Symbolen aus:

Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine weitere reelle Zahl.

Aufgabe 4.

a) Unter Kontraposition versteht man die folgende Äquivalenz:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir nehmen an, dass A wahr ist. Wir würden gerne zeigen, dass eine Implikation $A \Rightarrow B$ gilt, stattdessen ist aber bekannt, dass $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt. Warum kann man dann folgern, dass B wahr ist?

Die Kontraposition kann man dazu nutzen, einen *Beweis durch Widerspruch* zu führen. Was bedeutet das? Diskutiere dies anhand von Beispielen.

b) Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Benutze die Kontraposition, um folgende Aussage zu beweisen:

Ist $xy > z^2$, dann gilt $x > z$ oder $y > z$.