Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 9

Abgabe bis 18. Juni 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1.

a) Es seien $U = \langle (1,0,1,1), (-1,1,0,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (1,0,1,0), (1,1,1,1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Zeige: $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$.

b) Es seien $(1,2,3,4,5), (1,1,2,0,0), (7,7,7,7,7) \in \mathbb{R}^5$. Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze zu einer Basis. (4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $B = \{(3,5,2), (1,1,-1), (2,4,1)\}$.

a) Zeige, dass B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Ersetze mit Hilfe des Austauschsatzes zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(1,3,2)$ und $(-2,1,2)$. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $\phi : V \longrightarrow W$ ein Vektorraumhomomorphismus und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Zeige: ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\phi(b_1), \ldots, \phi(b_n) \in W$ linear unabhängig sind. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in K^n$ und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n. Zeige: die Vektoren $\mathbf{1} - e_1, \ldots, \mathbf{1} - e_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt $\mathrm{Char}(K) > 0$ und $\mathrm{Char}(K)$ ist ein Teiler von $n-1$. (4 Punkte)