Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 8

Abgabe bis 11. Juni 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Entscheide, ob die folgenden Familien von Vektoren jeweils linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4) \in \mathbb{R}^2$

b) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$.

c) $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

d) $z, \bar{z}$, wobei $0 \neq z \in \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefaßt wird. (4 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Zeige, dass die Menge $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ bildet und gib eine Basis an.

b) Bestimme eine Basis für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\langle X^2, X^2{+}X, X^2{+}1, X^2{+}X{+}1, X^7{+}X^5\rangle \subset \mathbb{R}[X]$.

c) Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_f := \{\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi(x) = 0 \text{ bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$. Zeige: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}_f$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und bestimme eine Basis. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heisst *Projektion*, falls gilt $f \circ f = f$.

a) Zeige, dass $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y, x + y)$ eine Projektion ist und bestimme Bild und Kern von π.

b) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist eine Projektion.

(ii) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion.

(iii) $\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Kern}(f)$.

(iv) $\mathrm{Kern}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Bild}(f)$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Es sei K ein Körper mit endlich vielen Elementen.

a) Zeige, dass K ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für geeignetes p ist (Hinweis: man benutze den Homomorphiesatz für Ringe).

b) Zeige, dass K eine endliche Basis als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum besitzt.

c) Bestimme die Anzahl der Elemente in K in Abhängigkeit von seiner Dimension als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. (4 Punkte)