Übungen zu Lineare Alebra I

Lösungsvorschlag zu Blatt 7

Aufgabe 1

(1.) kein Untervektorraum (z.B. ist das 2-fache des ersten Vektors nicht in der Menge).

(2.) kein Untervektorraum, da $(0,0,0,0)$ nicht in der Menge liegt (hier gibt es viele weitere Möglichkeiten zu argumentieren, z.B. ist $(1,0,0,0)$ in der Menge aber $2 \cdot (1,0,0,0)$ nicht.)

(3.) Beh: Die Menge $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$ ist ein Untervektoraum des $\mathbb{R}^4$.
Beweis: Es ist $0 \in M$, also ist M nicht leer. Die Menge M ist abgeschlossen unter Addition, denn für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$ gilt

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i = 0 + 0 = 0.$$

Das heißt, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in M$. Ist weiter $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, dann ist $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) \in M$, denn

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{4} x_i = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Also ist M auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation und damit ein Untervektorraum[1] des $\mathbb{R}^4$.

(4.) Beh: Die Menge $M = \{([1],[0],[0],[0]), ([0],[1],[0],[0]), ([1],[1],[0],[0]), ([0],[0],[0],[0])\}$ ist ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Untervektoraum von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.
Beweis: M ist offensichtlich nicht leer. Eine andere Beschreibung für M ist

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^4 \mid x_3 = 0 \text{ und } x_4 = 0\}.$$

Nun zeigt man wie in Aufgabe 1.3, dass M ein Unterraum ist. Genauer, sind $(x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$, so ist $x_3 + y_3 = 0$ und $x_4 + y_4 = 0$, also $(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \in M$. Ist $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein Skalar und $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, dann ist $\lambda x_3 = 0$ und $\lambda x_4 = 0$. Es gilt also $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$. Damit ist M ein Untervektorraum.

[1] Um zu prüfen, dass $(M, +)$ eine additive Untergruppe von $\mathbb{R}^4$ ist, muss laut Definition noch gezeigt werden, dass mit $u \in M$ auch $-u \in M$ gilt. Falls die Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation gezeigt wurde, kann dieser Teil jedoch stets weg gelassen werden, da wir für den Skalar einfach -1 wählen können.

Aufgabe 2

(a) Beh.: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (3x + y, 2x)$ ist linear.
Bew.: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3(x_1 + x_2) + y_1 + y_2, 2(x_1 + x_2)) \\ =&(3x_1 + y_1, 2x_1) + (3x_2 + y_2, 2x_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (3\lambda x + \lambda y, 2\lambda x) = \lambda(3x + y, 2x) = \lambda f(x, y)$$

für alle$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

(b) Beh.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$ ist genau dann linear, wenn $b = 0$.
Bew.: „$\Leftarrow$" Für $b = 0$ gilt $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda x) = a\lambda x = \lambda f(x)$ für alle $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.
„$\Rightarrow$" Falls f linear ist, so gilt $f(0) = 0$ (in der Vorlesung wurde gezeigt, dass dies für jede lineare Abbildung gilt[2]). Also haben wir $0 = f(0) = a \cdot 0 + b = b$.

(c) Additivität wurde in der Vorlesung gezeigt ($\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$). Für die Homogenität prüfen wir mit[3] $\lambda \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \in C$:

$$\overline{\lambda z} = \overline{\lambda x + \lambda y i} = \lambda x - \lambda y i = \lambda\,(x - iy) = \lambda \overline{z}.$$

(d) Seien $(x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 + \sqrt{2}(y_1 + y_2) \\ =&x_1 + \sqrt{2}y_1 + x_2 + \sqrt{2}y_2 = f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2) \text{ und} \end{aligned}$$

$$f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + \sqrt{2}\lambda y = \lambda(x + \sqrt{2}y) = \lambda f(x, y).$$

---

[2] Wiederholung der Begründung: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Durch Addition von $-f(0)$ folgt $0 = f(0)$.

[3] Beachte, dass $\mathbb{C}$ laut erster Zeile der Aufgabenstellung als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet werden soll und der Skalar deshalb aus $\mathbb{R}$ gewählt werden muss. Würde man $\mathbb{C}$ hier als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachten, so wäre f wegen $-i = f(i \cdot 1) \neq i \cdot f(1) = i$ nicht homogen.

Aufgabe 3

(a) Beh. $U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum.
Bew.: Da U_1 und U_2 jeweils die 0 enthalten, ist $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$, dann gilt $u, v \in U_1$, also $u + v \in U_1$ (da U_1 Untervektorraum). Analog gilt $u + v \in U_2$ und somit $u + v \in U_1 \cap U_2$. Sei weiter $\lambda \in K$. Wegen $u \in U_1$ gilt $\lambda u \in U_1$ und analog $\lambda u \in U_2$ und somit $\lambda u \in U_1 \cap U_2$.

(b) Beh.: $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.
Bew.: „$\Leftarrow$" Fall 1 $U_1 \subset U_2$. Dann ist $U_1 \cup U_2 = U_2$ ein Untervektorraum. Fall 2 $U_2 \subset U_1$ analog.
„$\Rightarrow$" Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum. Annahme: Es gilt weder $U_1 \subset U_2$ noch $U_2 \subset U_1$. Dann wählen wir ein $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und ein $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Dann gilt $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$, aber $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$ (wäre $u_1 + u_2 = w \in U_1$, so wäre $u_2 = w - u_1 \in U_1$. Widerspruch zur Wahl von u_2. Analog ist $u_1 + u_2 \in U_2$ unmöglich). Wir haben also einen Widerspruch zur unser Voraussetzung, dass $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist, hergeleitet und damit bewiesen, dass die Annahme falsch war.

(c) Dies ist ein Untervektorraum: Er ist nicht leer und sind $u + v, x + y \in U_1 + U_2$ (mit $u, x \in U_1$ und $v, y \in U_2$) und $\lambda \in K$, so gilt

$$u + v + x + y = \underbrace{u + x}_{\in U_1} + \underbrace{v + y}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \text{ und } \lambda(u + v) = \underbrace{\lambda u}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda v}_{\in U_2} \in U_1 + U_2.$$

(d) Beh.: Dies ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $v \in U_1$.
„$\Leftarrow$" Wir zeigen, dass $v + U_1 = U_1$ gilt. Dann ist $v + U_1$ ein Untervektorraum. Sei dazu $v + u_1 \in v + U_1$, dann gilt $v + u_1 \in U_1$ (da U_1 additiv abgeschlossen ist). Gilt andererseits $u_1 \in U_1$, so folgt $u_1 = v + (u_1 - v) \in v + U_1$ (beachte, dass u_1, v und somit $u_1 - v$ Elemente von U_1 sind).
„$\Rightarrow$" Falls $v + U_1$ ein Untervektorraum ist, so enthält er die 0, also gibt es ein u_1 mit $0 = v + u_1$. Damit ist $v = -u_1 \in U_1$.

Aufgabe 4

(a) Um zu zeigen, dass + wohldefiniert ist müssen wir nachrechnen, dass mit $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Summe $f+g$ wieder in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ liegt. Dazu seien $u, v \in V$ und $c \in K$. Dann gilt (1. Gleichheitszeichen Definition von $f+g$, 2tes benutzen, dass f, g linear sind, 3tes Umformen, 4tes nochmal Definition von $f+g$)

$$\begin{aligned}(f+g)(u+v) &= f(u+v)+g(u+v) = f(u)+f(v)+g(u)+g(v)\\ &= f(u)+g(u)+f(v)+g(v) = (f+g)(u)+(f+g)(v)\\ (f+g)(c\cdot u) &= f(c\cdot u)+g(c\cdot u) = c\cdot f(u)+c\cdot g(u)\\ &= c\cdot(f(u)+g(u)) = c\cdot(f+g)(u)\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise, zeigen wir dass $\lambda \cdot f$ wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot f)(u+v) &= \lambda\cdot f(u+v) = \lambda\cdot(f(u)+f(v))\\ &= \lambda\cdot f(u)+\lambda\cdot f(v) = (\lambda\cdot f)(u)+(\lambda\cdot f)(v)\\ (\lambda\cdot f)(c\cdot u) &= \lambda\cdot f(c\cdot u) = \lambda\cdot(c\cdot f(u))\\ &= c\cdot\lambda\cdot f(u) = c\cdot(\lambda\cdot f)(u)\end{aligned}$$

Um zu beweisen, dass $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum ist, müssen noch die folgenden Axiome geprüft werden: (i) $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist mit + eine kommutative Gruppe. (ii) Es gelten beide Distributivgesetze (iii) Assoziativgesetz (iv) Für jede Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist $1_K \cdot f = f$. Axiome ergeben sich jeweils einfach aus entsprechenden Axiomen für W. Wir zeigen, dass $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$ für $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda \in K$ gilt (und damit eines der Distributivgesetze, andere Axiome hier weggelassen). Um die Gleichheit dieser Abbildung zu zeigen, setzen wir auf beiden Seiten einen Vektor $v \in V$ ein. Dann gilt (1. Gleichheitszeichen: Definition von $\cdot$ in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, 2.: Definition von +, 3. Distributivgesetz in W, 4. Defintion $\cdot$, 5. Definition +)

$$\begin{aligned}&(\lambda(f+g))(v) = \lambda((f+g)(v)) = \lambda(f(v)+g(v)) = \lambda f(v)+\lambda g(v)\\ =&(\lambda f)(v)+(\lambda g)(v) = (\lambda f+\lambda g)(v)\end{aligned}$$

Bem.: Additiv Invers zu $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist die Abbildung $(-1)\cdot f = -f$ mit $(-f)(v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

(b) Für die Additivität von f^{-1} kann auf die Vorlesung verwiesen werden (da entsprechende Aussage für bijektive Gruppenhomomorphisemn gezeigt wurde, siehe Skript Woche 5, Seite 2, Satz (iii)) oder direkt geprüft werden:
Seien $w_1, w_2 \in W$. Dann gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Damit gilt (1. Gleichheitszeichen Definition von v_1, v_2, 2. Linearität von f, 3. f und f^{-1} sind invers, 4. Defintion von v_1, v_2)

$$f^{-1}(w_1+w_2) = f^{-1}(f(v_1)+f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1+v_2)) = v_1+v_2 = f^{-1}(w_1)+f^{-1}(w_2).$$

Die Homogenität prüft man auf die gleiche Weise. Seien dazu $c \in K$ und $w \in W$. Wähle ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Dann gilt

$$f^{-1}(cw) = f^{-1}(cf(v)) = f^{-1}(f(cv)) = cv = cf^{-1}(w).$$