Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 7

Abgabe bis 4. Juni 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$?

1. $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,0,0),(0,0,0,0)\}$
2. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$.
3. $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$.
4. Ist folgende Menge ein Untervektorraum des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraums $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$?

$$\{([1],[0],[0],[0]),([0],[1],[0],[0]),([1],[1],[0],[0]),([0],[0],[0],[0])\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Untersuche die folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}$-Vektorräumen auf ihre Linearität:

a) $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (3x+y, 2x)$.

b) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$, für $a, b \in \mathbb{R}$.

c) $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$

Ist die Abbildung $\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+\sqrt{2}y$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen?

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von K. Sind folgende Mengen ebenfalls Untervektorräume von V?

a) $U_1 \cap U_2$.

b) $U_1 \cup U_2$.

c) $U_1 + U_2 := \{u + v \mid u \in U_1, v \in U_2\}$.

d) $v + U_1 := \{v + u \mid u \in U_1\}$ für ein $v \in V$.

Hinweis: man achte darauf, dass die Antworten von U_1, U_2 und v abhängen können.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Es seien K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Mit $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen von V nach W. Wir definieren zwei Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} + &: \mathrm{Hom}_K(V,W) \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W), \quad (f,g) \mapsto f+g \\ \cdot &: K \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W), \quad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \end{aligned}$$

wobei für alle $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)(v) &= f(v) + g(v) \\ (\lambda \cdot f)(v) &= \lambda \cdot f(v). \end{aligned}$$

a) Zeige, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind (was in diesem Fall bedeutet: sind verknüpfte Abbildung der Form $f+g$ bzw. $\lambda \cdot f$ linear?) und $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist.

b) Es sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ bijektiv. Zeige, dass $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_K(W,V)$.

(4 Punkte)