Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

# Lineare Algebra 1
## Übungsblatt 5

Abgabe bis 21. Mai 2014, 10:20 Uhr

**Aufgabe 1.**

a) Stelle fest, welche der folgenden Ringe nullteilerfrei sind und gib ggf. die Menge der Nullteiler an:
$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^{\{1,2\}}.$$

b) Betrachte die Abbildung
$$\phi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad n \mapsto \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$
Zeige, dass $\phi$ ein Ringhomomorphismus ist und bestimmen den Kern. (4 Punkte)

**Aufgabe 2.** Es sei $R$ ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. In der Vorlesung wurde behauptet, dass $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ mit Matrizenaddition und -multiplikation ein Ring ist. Gib einen vollständigen Beweis für diese Aussage. (4 Punkte)

**Aufgabe 3.** Es sei $R$ ein Ring und $R[X]$ der Polynomring mit Koeffizienten in $R$. In der Vorlesung wurde nur die Assoziativität der Multiplikation in $R[X]$ nachgewiesen. Zeige zur Vervollständigung, dass auch das Distributivgesetz gilt. (3 Punkte)

**Aufgabe 4.** Es seien $R$ ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Betrachte das $n$-fache kartesische Produkt
$$R^n = \{(r_1, \ldots, r_n) \mid r_i \in R \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}.$$
Auf $R^n$ definieren wir Addition und Multiplikation komponentenweise:
$$+ : R^n \times R^n \to R^n, \quad ((r_1, \ldots, r_n), (s_1, \ldots, s_n)) \mapsto (r_1 + s_1, \ldots r_n + s_n),$$
$$\cdot : R^n \times R^n \to R^n, \quad ((r_1, \ldots, r_n), (s_1, \ldots, s_n)) \mapsto (r_1 \cdot s_1, \ldots r_n \cdot s_n).$$

a) Zeige, dass $R^n$ mit obigen Verknüpfungen ein Ring ist.

b) Gib jeweils ein Beispiel für Ringe der Form $R^n$ (d.h. man wähle geeignete $R$ und $n$), so dass $R^n$ Nullteiler besitzt, bzw. nullteilerfrei ist.

c) Welche Bedingungen muss man an $R$ und $n$ stellen, so daß $R^n$ nullteilerfrei ist?

d) Man betrachte die Menge $M = \{1, \ldots, n\}$. Dann können wir jedem $\underline{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in R^n$ eine Abbildung $\phi_{\underline{r}} : M \to R$, $i \mapsto r_i$ zuordnen. Zeige, dass die durch diese Zuordnung definierte Abbildung ein Ringisomorphismus von $R^n$ nach $R^M$ ist.

(5 Punkte)