Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 4

Abgabe bis 14. Mai 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Bestimme alle zyklischen Untergruppen von:

a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$,

c) $(\mathbb{R}, +)$,

d) Sym_3. (4 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Es sei $\phi : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\phi([3]) = [9]$. Bestimme $\phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

b) Bestimme alle Homomorphismen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ und jeweils Bild und Kern.

c) Bestimme alle Homomorphismen von Sym_3 nach $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und jeweils Bild und Kern.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei G eine Gruppe. Für ein $g \in G$ bezeichne $L_g : G \to G$, $x \mapsto gx$ die Linkstranslation. Zeige:

a) L_g ist injektiv.

b) Die Abbildung $\phi : G \to \mathrm{Sym}(G)$ ist ein Monomorphismus.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.

a) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Zeige, dass folgende Gleichung für die Kardinalität von G gilt:

$$|G| = |G/H| \cdot |H|.$$

b) Es seien G und H endliche Gruppen mit teilerfremder Kardinalität. Ausserdem sei G abelsch. Zeige, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus von G nach H gibt.

Hinweis: verwende Teil a) und den Homomorphiesatz.

(4 Punkte)