Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 3

Abgabe bis 7. Mai 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Für eine endliche Gruppe $(G, *)$ kann man eine *Verknüpfungstafel* aufstellen, deren Einträge die Werte $x * y$ für jedes Paar $(x, y) \in G \times G$ enthält. Betrachte folgende unvollständige Verknüpfungstafel für eine Gruppe mit vier Elementen:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	?	e	?	?
b	?	?	?	?
c	?	?	?	?

(hier sollen z.B. in der dritten Zeile die Verknüpfungen $b * e$, $b * a$, $b * b$, $b * c$ angegeben werden). Welche Möglichkeiten gibt es, um diese Tafel zu vervollständigen? Sind die diesen Möglichkeiten entsprechenden Gruppen abelsch?
Hinweis: Zur Vereinfachung kann zur Lösung dieser Aufgabe darauf verzichtet werden, die Assoziativität für alle möglichen Tripel von Elementen nachzuweisen. Man achte jedoch darauf, ob die Assoziativität ausgenutzt werden kann, um die Tabelle zu vervollständigen. (4 Punkte)

Aufgabe 2. Es sei $G := \{f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$. Zeige, dass G bezüglich der Komposition von Abbildungen eine nicht-abelsche Gruppe ist. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Dann ist G genau dann abelsch, wenn für alle $x, y \in G$ gilt: $(xy)^2 = x^2y^2$.
Bemerkung: für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in G$ schreiben wir $x^n := x \cdot x \cdots x$ (n Faktoren), d.h. die n-fache Verknüpfung von x mit sich selber. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Bestimme alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, [+])$. (4 Punkte)