Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1
Übungsblatt 12

Abgabe bis 9. Juli 2014, 10:20 Uhr

Aufgabe 1. Stelle fest, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind und bestimme gegebenenfalls die Inversen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2+i & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

$$\begin{pmatrix} [1] & [1] & [0] \\ [2] & [3] & [3] \\ [3] & [1] & [-2] \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{F}_p) \qquad \text{für } p = 2, 5$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.

a) Prüfe, ob die folgenden reellen linearen Gleichungssysteme lösbar sind und bestimme ggf. sämtliche Lösungen:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 16 \end{aligned}$$

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccrl} ax_1 & + & & & x_3 & = ab \\ -2x_1 & + & bx_2 & + & ax_3 & = -b \\ & & bx_2 & + & (a+1)x_3 & = b \end{array}$$

ausser $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen? Bestimme diese. (4 Punkte)

Aufgabe 3.

a) Es sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h. von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{nn} \neq 0$. Zeige ausschließlich mit Hilfe der definierenden Eigenschaften der Determinante und elementarer Spaltentransformationen, dass gilt $\det A = \prod_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$.

b) Überführe die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

durch elementare Spaltentransformationen in obere Dreiecksform und bestimme die Determinante der daraus resultierenden Matrix A'. Bestimme $c \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A) = c\det(A')$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Für $1 \leq i < j \leq n$ bezeichne $(i, j) \in \mathrm{Sym}_n$ die Transposition von i und j. Gib mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Aussagen zwei verschiedene Beweise dafür an, dass gilt

$$\mathrm{sgn}(i, j) = -1.$$

(4 Punkte)