Mathematisches Institut
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Übungsblatt 10

Abgabe bis 25. Juni 2014, 10:20 Uhr

Hinweis für Mathematikstudierende: Durch Lösen dieses Übungsblattes können 3 Credit-Punkte für das Lineare Algebra-Tutorium erzielt werden. Hierzu müssen mindestens 40 % der Punkte erreicht werden. Soll Ihre Abgabe für das Tutorium gewertet werden, dann machen Sie das bitte **deutlich** kenntlich mit der Angabe "Tutoriumsblatt".

Aufgabe 1. Es sei folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und wir betrachten die zugehörige Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A \cdot v$.

a) Bestimme eine Basis B von $\mathrm{Bild}(\phi_A)$ und gib die Darstellende Matrix $M_B^E(\phi_A)$ an, wobei $E = e_1, \dots, e_4$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Betrachte den Untervektorraum $V := \langle (1,0,0,1), (0,0,1,3) \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. Gib bezüglich geeigneter Basen eine darstellende Matrix für die Abbildung $f : V \longrightarrow \mathrm{Bild}(f)$ an, wobei f die Einschränkung von ϕ_A auf V ist. (4 Punkte)

Aufgabe 2. Für $d \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathbb{R}[X]_{\leq d} := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f = \sum_{i \geq 0} \alpha_i X^i$ und $\alpha_i = 0$ für $i > d\} \subset \mathbb{R}[X]$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$. Wir definieren eine Abbildung $\mathbb{R}[X]_{\leq d} \longrightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq d}$, $f \mapsto f'$, wobei wir für $f = \sum_{i=0}^d \alpha_i X^i$ setzen: $f' := \sum_{i=1}^d i\alpha_i X^{i-1}$. Diese Abbildung nennen wir die *Ableitungsabbildung*.

a) Zeige, dass die Ableitungsabbildung linear ist.

b) Bestimme die darstellende Matrix bezüglich der Basis $\{1, X, \dots, X^d\}$. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Betrachte Basen $B_1 = (1,1), (0,1)$, $B_2 = (2-1), (2,3)$, $B_3 = (4,4), (1,2)$, $B_4 = (-1,1), (0,2)$ von $\mathbb{R}^2$, sowie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit Matrix-Darstellung

$$M_{B_2}^{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne $T_{B_4}^{B_2}$, $T_{B_1}^{B_3}$ und $M_{B_4}^{B_3}(f)$.

b) Bestimme Basen B_5 und B_6 von $\mathbb{R}^2$, so dass

$$M_{B_6}^{B_5}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeige:

a) Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $U \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, dann ist die Einschränkung von f auf U injektiv.

b) Ist U ein Komplement von $\mathrm{Kern}(f)$ in V, dann ist die Einschränkung von f auf U ein Isomorphismus von U nach $\mathrm{Bild}(f)$. (4 Punkte)