Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Neunte Woche, 4.6.2014

§5 Vektorräume (Ende)

Satz: *Es sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

(i) V/U ist ein K-Vektorraum.

(ii) Die Projektionsabbildung $\pi : V \longrightarrow V/U$, $v \mapsto [v]$ ist linear.

Korollar: *Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind $V/\operatorname{Kern}(f)$ und $W/\operatorname{Bild}(f)$ K-Vektorräume.*

Definition: Man bezeichnet $W/\operatorname{Bild}(f)$ auch als *Kokern* von f.

Faßt man die Inklusion $\operatorname{Kern}(f) \subset V$ als Abbildung auf (eine übliche Schreibweise ist: $\operatorname{Kern}(f) \hookrightarrow V$), dann kann man das Verhältnis von Kern zu Kokern auf symmetrische Weise wie folgt darstellen:

$$\operatorname{Kern}(f) \hookrightarrow V \xrightarrow{f} W \twoheadrightarrow \operatorname{Kokern}(f)$$

(wobei man mit $\twoheadrightarrow$ eine surjektive Abbildung kenntlich macht).

Satz (Homomorphiesatz für Vektorräume)**:** *Es seien V, W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine bijektive lineare Abbildung $g : V/\operatorname{Kern}(f) \longrightarrow \operatorname{Bild}(f)$, so daß $f = g \circ \pi$.*

In Diagrammform haben wir also wieder:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Bild}(f) \subset W \\ V/\operatorname{Kern}(f) \arrow[ur, "\exists!", "g"'] & \end{tikzcd}$$

Satz: *Es sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Dann sind äquivalent:*

(i) U ist ein Untervektorraum.

(ii) Für alle $\lambda \in K$ und $u, v \in U$ gilt: $u - v \in U$ und $\lambda u \in U$.

(iii) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $u, v \in U$ gilt: $\lambda u + \mu v \in U$.

§6 Erzeugendensysteme, Basen und Dimension

Auch in diesem Abschnitt sei K stets ein Körper.

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum.

(i) Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen in V. Dann heißt $v \in V$ eine *endliche Linearkombination* von Elementen dieser Familie, wenn es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt und eine Familie $(\lambda_j)_{j\in J}$ von Elementen in K, so daß gilt:

$$v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j.$$

Ist insbesondere $I = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann ist v eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, so daß

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

(ii) Es sei $M \subset V$ eine beliebige Teilmenge und wir bezeichnen $\mathcal{M} := \{U \subset V \mid U \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ und } M \subset U\}$. Dann setzen wir:

$$\langle M \rangle := \bigcap_{U\in\mathcal{M}} U.$$

Für eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ schreiben wir auch:

$$\langle v_i \mid i \in I \rangle := \langle \{v_i\}_{i\in I} \rangle.$$

Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir auch $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Satz: *Es sei V ein Vektorraum und $M \subset V$.*

(i) $\langle M \rangle$ ist ein Untervektorraum von V.

(ii) $\langle M \rangle$ besteht aus endlichen Linearkombinationen von Elementen in M.

Definition: Es seien M und V wie zuvor.

(i) $\langle M \rangle$ heißt *der von M erzeugte Untervektorraum* (bzw. die *lineare Hülle* von M in V).

(ii) Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Falls gilt $U = \langle M \rangle$, dann heißt M *Erzeugendensystem* von U.

(iii) Wenn gilt $\langle M \rangle = V$, dann heißt M *Erzeugendensystem* von V.

(iv) V heißt *endlich erzeugt*, wenn es ein endlichens Erzeugendensystem besitzt.

Definition: Eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i\in I}$ heißt *linear abhängig*, wenn es eine endliche Teilmenge $J \subset I$ und eine Familie $(\lambda_j)_{j\in J}$ von Elementen in K gibt, so daß $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$ und $\lambda_j \neq 0$ für mindestens ein $j \in J$. Andernfalls heißt $(v_i)_{i\in I}$ *linear unabhänging*. Ist insbesondere $I = \{1, \ldots n\}$, dann sind Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhänging, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt, so daß $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ und $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i.

Bemerkung: (i) $(v_i)_{i\in I}$ ist genau dann linear unabhänging, wenn für alle endlichen Teilmengen $J \subset I$ und Familien $(\lambda_j)_{j\in J}$ von Elementen in K mit $\sum_{j\in J} \lambda_j v_j = 0$ gilt, daß $\lambda_j = 0$ für alle $j \in J$.

(ii) $\emptyset$ ist linear unabhänging.

(iii) $\{0\}$ ist linear abhängig.

(iv) Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, dann ist auch $(v_j)_{j\in J}$ linear unabhängig für alle $J \subset I$.

(v) Gibt es $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und $v_i = v_j$, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig.

Beispiel: Es sei $V = K^n$. Dann setzen wir $e_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Dann sind $e_1, \ldots, e_n$ linear unabhängig und es gilt $V = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$.

Satz: *Es sei V ein Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V. Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ genau dann linear unabhängig, wenn man in $\langle x_i \mid i \in I\rangle$ jedes Element* eindeutig *als Linearkombination der v_i schreiben kann.*

Definition: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis*.

Beispiele: 1) $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis von K^n.

2) In $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ bezeichne e_{ij} die Matrix, deren einziger von 0 verschiedener Eintrag sich in der i-ten Zeile und j-ten Spalte befindet und den Wert 1 hat. Dann bilden $\{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

3) Faßt man $K[X]$ als K-Vektorraum auf, dann bilden die Monome $1, X, X^2, X^3, \ldots$ eine Basis.

4) 1 und i bilden eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Jedes $z \neq 0$ bildet eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind äquivalent:*

(i) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear abhängig.

(ii) Es gibt ein $1 \leq k \leq n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n \in K$, so daß $v_k = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \lambda_i v_i$.

(iii) Es gibt ein $1 \leq k \leq n$, so daß $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$.

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Wir nennen ein Erzeugendensystem $(v_i)_{i\in I}$ von V *minimal*, wenn für alle $j \in I$ gilt: $\langle v_i \mid i \in I \setminus \{j\}\rangle \neq V$.

Satz: *Jeder endlich erzeugte K-Vektorraum besitzt eine Basis und jede solche Basis ist endlich.*

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.

(ii) $v_1, \ldots, v_n$ sind eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

(iii) $v_1, \ldots, v_n$ sind ein minimales Erzeugendensystem von V.

Satz (Basisergänzungssatz)**:** *Es sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig und $w_1, \ldots, w_m$ ein Erzeugendensystem von V. Wenn $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \neq V$, Dann gibt es $i_1, \ldots, i_s \in \{1, \ldots, m\}$, so daß $v_1, \ldots, v_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_s}$ eine Basis von V bilden.*

Satz (Austauschlemma)**:** *Es sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_r$ eine Basis von V und $0 \neq w \in V$. Dann gibt es ein $1 \leq k \leq n$, so daß $v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V bilden.*

Satz (Steinitzscher Austauschsatz)**:** *Es sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $w_1, \ldots, w_r$ eine Linear unabhängige Famile von Vektoren in V. Dann gilt $r \leq n$ und es gibt $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots n\}$, so daß man nach Austausch von w_k gegen v_{i_k} für $1 \leq k \leq r$ wieder eine Basis erhält.*

Bemerkung: Nach Umnumerierung kann man annehmen, daß $i_1 = 1, \ldots i_r = r$ gilt, also $w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Basis bildet.

Korollar: *Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_m$, $w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V. Dann gilt: $m = n$.*

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Besitzt V eine endliche Basis $v_1, \ldots, v_n$, dann setzen wir $\dim V := n$, die *Dimension* von V. Wir nennen V in diesem Fall auch endlich-dimensional. Besitzt V keine endliche Basis, dann nennen wir V *unendlich-dimensional* und setzen $\dim V := \infty$.

Literatur-/Lesevorschläge

S. Bosch, *Lineare Algebra*, §1.5
G. Fischer, *Lineare Algebra*, §1.5