Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Achte Woche, 28.5.2014

§4 Ringe und Körper (Ende)

Wir bezeichnen mit $U(1)$ die Menge $\{e^{i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}$. Mit der Regel $e^{i\phi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\phi+\psi)}$ für alle $\phi, \psi \in \mathbb{R}$ definiert die Multiplikation eine Verknüpfung auf $U(1)$.

Satz: *(i) $U(1)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{C}, \cdot)$.*

(ii) Die Abbildung $e^{i\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow U(1)$, $\phi \mapsto e^{i\phi}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Ihr Kern ist $2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, so daß $w^n = n$. Diese Gleichung läßt sich besonders schön in Polarkoordinaten behandeln. Wir schreiben: $z = re^{i\phi}$ und $w = se^{i\psi}$, dann gilt:

$$s^n e^{in\psi} = re^{i\phi}.$$

Insbesondere müssen also erfüllt sein:

$$s^n = r \quad \text{und} \quad e^{in\psi} = e^{i\phi}.$$

Da r eine positive reelle Zahl ist, gibt es genau eine positive reelle Lösung s mit $s^n = r$. Mit Hilfe des Satzes ist die zweite Gleichung äquivalent zu der Bedingung, daß es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß gilt:

$$n\psi = \phi + 2\pi m.$$

Division mit n ergibt somit:

$$\psi = \frac{\phi}{n} + 2\pi\frac{m}{n},$$

also

$$e^{i\psi} = e^{i\frac{\phi}{n}} e^{2\pi i\frac{m}{n}} = e^{i\frac{\phi}{n}} e^{2\pi i\frac{k}{n}},$$

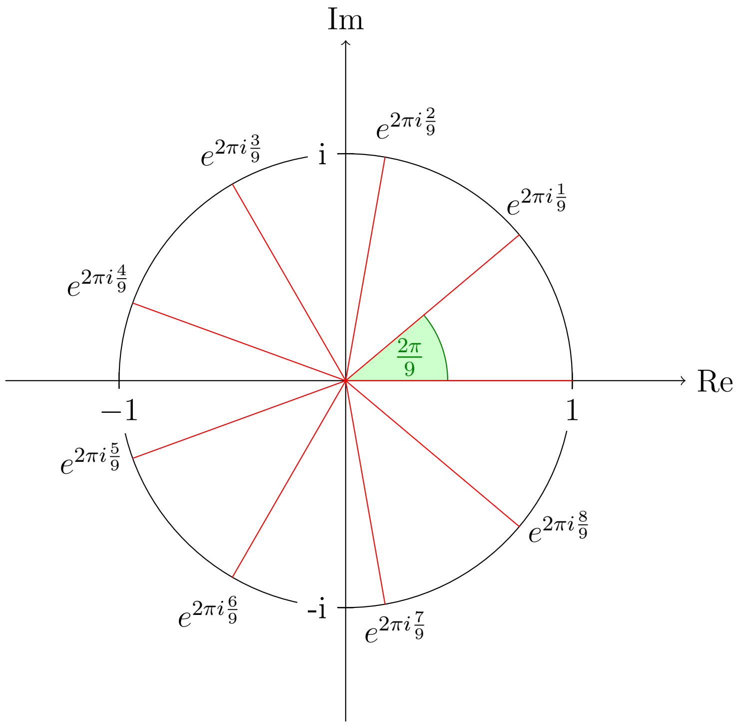
wobei $0 \leq k < n$ der Rest von m modulo n ist. In der Tat besitzt die Gleichung $w^n = z$ somit n Lösungen, wobei die Faktoren der Form $e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ eine besondere Rolle spielen.

Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir mit $E_n := \{e^{2\pi i\frac{k}{n}} \mid 0 \leq k < n\}$ die Menge der *n-ten Einheitswurzeln* in $\mathbb{C}$.

Offenbar ist die Menge E_n abgeschlossen bzgl. der Multiplikation. Wir haben sogar:

Satz: *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist E_n eine Untergruppe von $U(1)$. Außerdem ist definiert die Abbildung $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow E_n$, $[k] \mapsto e^{2\pi i\frac{k}{n}}$ einen Gruppenisomorphismus.*

Folgende Abbildung zeigt die Elemente von E_9.



§5 Vektorräume

In diesem Abschnitt sei K stets ein Körper.

Definition: Ein K-*Vektorraum* ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V && (Vektoraddition) \\ \cdot : K \times V &\longrightarrow V && (Skalarmultiplikation), \end{aligned}$$

so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) Distributivgesetze:

$$\forall \lambda, \mu \in K \ \forall v \in V : (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v,$$
$$\forall \lambda \in K \ \forall v, w \in V : \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w.$$

(iii) Das Assoziativgesetz:

$$\forall \lambda, \mu \in K \ \forall v \in V : \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v.$$

(iv) Für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$.

Elemente eines Vektorraumes heißen *Vektoren*.

Beispiele: 1. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^n = \{(v_1, \dots, v_n \mid v_i \in K\}$ ein K-Vektorraum. Insbesondere ist $K = K^1$ selber ein K-Vektorraum. Wir setzen $K^0 := \{0_K\}$.

2. Ist K Unterkörper eines Ringes R, dann ist R ein K-Vektorraum.

3. Für $m, n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Ein Element A dieser Menge schreiben wir als rechteckiges Schema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder kurz als $A = (a_{ij})_{ij}$, wobei der Index i von 1 bis m läuft und der Index j von 1 bis n. Auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ können wir eine Addition durch komponentenweises Addieren definieren, d.h. für $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit $A = (a_{ij})_{ij}$ und $B = (b_{ij})_{ij}$ setzen wir $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$. Für $\lambda \in K$ setzen wir $\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij})_{ij}$. Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ zu einem K-Vektorraum.

4. Für eine beliebige Menge M haben wir bereits gesehen, daß die Menge K^M der Abbildungen von M nach K ein Ring ist, also insbesondere auch eine additive abelsche Gruppe. Definieren wir für $\lambda \in K$ und $f \in K^M$ die Funktion $\lambda \cdot f : M \to K, m \mapsto \lambda \cdot f(m)$ als Skalarmultiplikation, so wird K^M zu einem K-Vektorraum.

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Rechenregeln:*

(i) Für alle $\lambda \in K$ gilt: $\lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(ii) Für all $v \in V$ gilt: $0_K \cdot v = 0_V$.

(iii) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt: $(-\lambda) \cdot v = \lambda \cdot (-v) = -(\lambda \cdot v)$.

(iv) Es seien $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $\lambda \cdot v = 0$. Dann gilt $\lambda = 0_K$ oder $v = 0_V$.

Definition: Es seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $\phi : V \longrightarrow W$ heißt *linear* bzw. *K-linear*, wenn gilt:

(i) ϕ ist Gruppenhomomorphismus von $(V, +)$ nach $(W, +)$.

(ii) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt: $\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v)$.

Wir nennen ϕ einen Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, ..., wenn er als Gruppenhomomorphismus ein Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, ... ist.

Definition: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ definieren wir eine Abbildung $\phi_A : K^n \longrightarrow K^m$, $v \mapsto A \cdot v$ durch

$$A \cdot v := (\sum_{k=1}^{n} a_{1k}v_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} a_{mk}v_k) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_k)_i$$

Satz: *Für $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ ist die Abbildung ϕ_A linear.*

Definition: Es seien $m, n, p \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die *Matrizenmultiplikation* wie folgt:

$$\mathrm{Mat}_{m\times p}(K) \times \mathrm{Mat}_{p\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K), \quad (A, B) \mapsto A \cdot B,$$

wobei

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}}, \text{ und } A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}, \text{ mit } c_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}.$$

Bemerkung: Bislang haben wir Elemente in K^n als n-Tupel von Elementen in K betrachtet. Offensichtlich kann man ein solches Tupel auch als $1 \times n$-Matrix auffassen, oder aber auch als $n \times 1$-Matrix. Je nachdem nennt man dann ein Element $(v_1, \dots, v_n)$ einen *Zeilenvektor* oder $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ einen *Spaltenvektor*. Um Platz zu sparen, werden wir Vektoren im Weiteren als Zeilenvektoren, bzw. als n-Tupel schreiben. Bei der Matrixmultiplikation ist jedoch wichtig, darauf zu achten, daß durchaus ein Unterschied besteht. Insbesondere kann man die zu einer $m \times n$-Matrix A gehörende Abbildung ϕ_A auch als Matrixmultiplikation ausdrücken:

$$\phi_A : \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K), \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}v_k \end{pmatrix}.$$

Definition: Es seien V, W K-Vektorräume. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W. Weiterhin definieren wir folgende Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} + &: \mathrm{Hom}_K(V,W) \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W), \quad (f,g) \mapsto f+g \\ \cdot &: K \times \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W), \quad (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f, \end{aligned}$$

wobei für alle $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (f+g)(v) &= f(v) + g(v) \\ (\lambda \cdot f)(v) &= \lambda \cdot f(v). \end{aligned}$$

Satz: *Es seien V, W K-Vektorräume. Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit den oben definierten Verknüpfungen ebenfalls ein K-Vektorraum.*

Satz: *Es seien U, V, W K-Vektorräume.*

(i) Sind $f \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ und $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, dann ist $g \circ f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

(ii) Für alle $f \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ and alle $g, g' \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gilt:

$$f \circ (g + g') = f \circ g + f \circ g'.$$

(iii) Für alle $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ und $g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gilt:

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g.$$

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Dann bezeichnen wir die Menge der K-linearen Endomorphismem von V mit $\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V,V)$.

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum. Dann ist $(\mathrm{End}_K(V), +, \circ)$ ein Ring.*

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Untervektorraum*, wenn gilt:

(i) U ist Untergruppe von $(V, +)$.

(ii) Für alle $\lambda \in K$ und alle $u \in U$ gilt: $\lambda \cdot u \in U$.

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist U ebenfalls ein K-Vektorraum.*

Satz: *Es seien V, W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. dann sind* $\mathrm{Kern}(f) \subset V$ *und* $\mathrm{Bild}(f) \subset W$ *jeweils Untervektorräume.*

Literatur-/Lesevorschläge

S. Bosch, *Lineare Algebra*, §2, §3.3
G. Fischer, *Lineare Algebra*, §2.1, §2.2