Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Fünfte Woche, 7.5.2014

§3 Gruppen (Fortsetzung)

Bemerkung: Für eine Gruppe G mache man sich folgende Aussagen klar:

1. $(x^{-1})^{-1}) = x$ für alle $x \in G$.
2. $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ für alle $x, y \in G$.
3. $yx = zx \Leftrightarrow y = z$ für alle $x, y, z \in G$.
4. $xy = xz \Leftrightarrow y = z$ für alle $x, y, z \in G$.

Die letzen beiden Aussagen bezeichnet man auch als *Kürzungsregel*.

Definition: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $x \in G$. Dann setzen wir $x^0 := 1_G$ und für $i \in \mathbb{N}$ induktiv: $x^i := x \cdot x^{i-1}$. Für $i < 0$ setzen wir $x^i := (x^{-1})^{-i}$. Wir bezeichen dann $\langle x \rangle := \{x^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

Satz: *Es sei G eine Gruppe und $x \in G$. Dann gilt:*

(i) $x^i \cdot x^j = x^{i+j}$ *für alle* $i, j \in \mathbb{Z}$.

(ii) $(x^i)^j = x^{ij}$ *für alle* $i, j \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\langle x \rangle$ *ist eine Untergruppe von* G.

(iv) $\langle x \rangle$ *ist abelsch.*

Definition: Es sei G eine Gruppe und $x \in G$. Dann heißt $\langle x \rangle$ die von x erzeugte *zyklische Untergruppe* von G. Gibt es ein $x \in G$, so daß $G = \langle x \rangle$, dann heißt G *zyklisch*.

Beispiel: Es gilt $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, [+]) = \langle [1] \rangle$ (für beliebiges n). Beides sind somit Beispiele für zyklische Gruppen.

Definition: Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $x, y \in G$ gilt:

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y).$$

Satz: *Es seien* $f_1 : (G_1, *) \to (G_2, \cdot)$ *und* $f_2 : (G_2, \cdot) \to (G_3, \#)$ *Gruppenhomomorphismen. Dann ist auch* $f_2 \circ f_1 : (G_1, *) \to (G_3, \#)$ *ein Gruppenhomomorphismus.*

Definition: Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen undi $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann heißt f

(i) *Monomorphismus*, wenn f injektiv ist,

(ii) *Epimorphismus*, wenn f surjektiv ist,

(iii) *Isomorphismus*, wenn f bijektiv ist,

(iv) *Endomorphismus*, wenn $(G, *) = (H, \cdot)$,

(v) *Automorphismus*, wenn f ein bijektiver Endomorphismus ist.

Satz: *Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gelten:*

(i) $f(1_G) = 1_H$.

(ii) $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ *für alle* $x \in G$.

(iii) Ist f bijektiv, dann ist $f^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus.

(iv) Ist $U \subset G$ eine Untergruppe, dann ist $f(U) \subset H$ auch eine Untergruppe.

(v) Ist $V \subset H$ eine Untergruppen, dann ist $f^{-1}(V) \subset G$ auch eine Untergruppe.

Definition: Es seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann bezeichnen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(f) &:= f(G) \\ \mathrm{Kern}(f) &:= f^{-1}(\{1_H\}). \end{aligned}$$

Satz: *Ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$ ist genau dann injektiv, wenn gilt:* $\mathrm{Kern}(f) = \{1_G\}$.

Definition: Es sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann definieren wir eine Relation auf G wie folgt:

$$\forall x, y \in G : x \sim y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in H.$$

Satz: *Es seien G, H wie in obiger Definition.*

(i) Obige Relation ist eine Äquivalenzrelation.

(ii) Es sei $x \in G$, dann enthält $[x]$ genau die Elemente $xH := \{xy \mid y \in H\}$.

Bemerkung: Wir haben gesehen, daß eine Äquivalenzrelation auf einer Menge genau einer Partionierung dieser Menge entspricht. In der Situtation des vorigen Satzes kann man dies wie folgt ausdrücken: es gibt eine Familie von Repräsentanten $\{g_i\}_{i \in I}$ in G, so daß

$$G = \coprod_{i \in I} [g_i] = \coprod_{i \in I} g_i H.$$

Definition: Es seien G, H wie in obiger Definition.

(i) Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen $G/\sim$ mit G/H.

(ii) Die Mengen xH für $x \in G$ heißen *(Links-)Nebenklassen*.

(iii) Wir nehmen zusätzlich an, daß G *abelsch* ist. Dann definieren wir wie folgt eine Verknüpfung für alle $[x], [y] \in G/H$:

$$[x] \cdot [y] := [x \cdot y].$$

Satz: *Es sei G abelsch und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist G/H mit der oben definierten Verknüpfung eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $[1_G]$ und für $[x] \in G/H$ gilt: $[x]^{-1} = [x^{-1}]$. Die Abbildung $\pi : G \to G/H$, $x \mapsto [x]$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern H.*

Definition: Die Gruppe G/H heißt *Quotient* oder *Faktorgruppe* von G nach H.

Bemerkung: Oft wird die Handhabung einer Quotientengruppe durch die Auswahl einer geeigneten Familie von Repräsentanten vereinfacht, d.h. bzgl. einer Partitionierung $G = \coprod_{i \in I} g_i H$ ist es oft einfacher, mit den g_i direkt zu rechnen anstatt mit den Äquivalenzklassen $g_i H$ und dabei im Hinterkopf zu behalten, daß die Ergebnisse "modulo H" zu verstehen sind.

Satz (Homomorphiesatz für abelsche Gruppen)**:** *Es sei $f : G \to H$ eine Gruppenhomomorphismus, wobei G abelsch ist. Dann gelten:*

(i) Es gibt einen eindeutig definierten surjektiven Gruppenhomomorphismus $g : G/\operatorname{Kern}(f) \to \operatorname{Bild}(f)$, so daß gilt $f = g \circ \pi$.

(ii) Die Abbildung g ist ein Isomorphismus.

(iii) Für jede Untergruppe K von $\operatorname{Kern}(f)$ gibt es eine wohldefinierte Abbildung $\pi_K : G/K \to G/\operatorname{Kern}(f)$ und wir erhalten somit eine Abbildung $g \circ \pi_H : G/K \to \operatorname{Bild}(f)$.

Bemerkung: In Diagrammform drückt man die erste Aussage des obigen Satzes wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Bild}(f) \\ G/\operatorname{Kern}(f) \arrow[ur, "\exists!", "g"'] & \end{tikzcd}$$

Man sagt, daß dieses Diagramm *kommutiert.* Ähnlich hat man für die dritte Aussage folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G/K \arrow[r, "g \circ \pi_K"] \arrow[d, "\pi_K"'] & \operatorname{Bild}(f) \\ G/\operatorname{Kern}(f) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Satz: *Jede zyklische Gruppe ist entweder isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ oder zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, [+])$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Literatur-/Lesevorschläge

A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, §9
R. Walter, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, §0.2