Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Dritte Woche, 23.4.2014

§2 Mengen, Abbildungen und Relationen (Fortsetzung)

Definition: Es seien M, N Mengen. Eine *Relation* zwischen M und N ist eine Teilmenge $R \subset M \times N$. Wir sagen, daß $m \in M$ in Relation zu $n \in N$ steht, wenn $(m, n) \in R$. Wir schreiben dann $m \sim_R n$ oder einfach $m \sim n$.

Definition: Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist der *Graph* von f gegeben durch:

$$\Gamma_f := \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = n\}.$$

Satz: *Es seien M, N Mengen. Dann definiert die Zuordnung $f \mapsto \Gamma_f$ eine Bijektion zwischen der Menge der Funktionen von M nach N und der Menge der Relationen $R \subset M \times N$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) Für alle $m \in M$ gibt es ein $n \in N$, so daß $(m, n) \in R$. *(linksvollständigkeit)*

2) Für alle $(m, n), (m', n') \in R$ gilt: $m = m' \Rightarrow n = n'$. *(rechtseindeutigkeit)*

Definition: Es sei M eine Menge. Eine *Ordnungsrelation* (oft auch Halbordnung, Teilordnung oder partielle Ordnung genannt) ist eine Relation $R \subset M \times M$, so daß folgende Axiome gelten:

1) Für alle $m \in M$ gilt: $m \sim m$. (Reflexitivität)

2) Für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt: wenn $m_1 \sim m_2$ und $m_2 \sim m_1$, dann ist $m_1 = m_2$. (Antisymmetrie)

3) Für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt: wenn $m_1 \sim m_2$ und $m_2 \sim m_3$, dann gilt $m_1 \sim m_3$. (Transitivität)

Für eine Ordnungsrelation ist die Notation

$$m \leq n :\Leftrightarrow m \sim n$$

geläufig. Dann können wir obige Axiome wie folgt umschreiben:

1) Für alle $m \in M$ gilt: $m \leq m$.

2) Für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt: wenn $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_1$, dann ist $m_1 = m_2$.

3) Für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt: wenn $m_1 \leq m_2$ und $m_2 \leq m_3$, dann gilt $m_1 \leq m_3$.

Definition: 1) Eine Ordnungsrelation “$\leq$″ auf einer Menge M heißt *Totalordnung* oder *lineare Ordnung*, falls je zwei beliebige Elemente aus M vergleichbar sind, d.h. es gilt:

$$\forall m, n \in M : \quad m \leq n \text{ oder } m \leq n.$$

2) Ist “$\leq$” eine Ordnungsrelation auf M, N eine Teilmenge von M und $n \in N$, dann heißt n *minimal* (bzw. *maximal*) in N, falls für alle $m \in N$ mit $m \leq n$ gilt $m = n$ (bzw. für alle $m \in N$ mit $n \leq m$ gilt $m = n$).

Beispiel: Auf der Potenzmente $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M kann man eine Teilordnung wie folgt definieren. Für beliebige Teilmengen P, Q von M gelte:

$$P \leq Q \;:\Leftrightarrow P \subset Q.$$

Beispiel: Für eine beliebige Menge M bezeichnen wir mit $\Delta := \{(m, m) \in M \times M\}$ die sogenannte *Diagonale* in $M \times M$. Die dadurch gegeben Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. In der dadurch definierten Teilordnung auf M ist jedes Element ausschließlich mit sich selbst vergleichbar, d.h. zwei beliebige, voneinander verschiedene Elemente sind unvergleichbar.

Satz: *Es sei M eine teilgeordnete Menge und N eine Teilmenge von M. Dann ist N ebenfalls eine teilgeordnete Menge.*

Man spricht in diesem Fall auch von der durch die Ordnung von M auf N *induzierten* Ordnung.

Definition: Es sei M eine teilgeordnete Menge und $N \subset M$, so daß die auf N induzierte Ordnung eine Totalordnung ist. Dann ist N eine *Kette* in M.

Definition: Es sei M eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf M ist eine Relation $\sim$ auf M, so daß gilt:

1) Für alle $m \in M$ gilt $m \sim m$. (Reflexivität)

2) Für alle $m_1, m_2 \in M$ gilt: $m_1 \sim m_2 \Rightarrow m_2 \sim m_1$. (Symmetrie)

3) Für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$ gilt: wenn $m_1 \sim m_2$ und $m_2 \sim m_3$, dann gilt $m_1 \sim m_3$. (Transitivität)

Definition: Es sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für ein $m \in M$ heißt $[m] := \{n \in M \mid n \sim m\}$ die *Äquivalenzklasse* von m in M. Jedes $n \in M$ heißt *Repräsentant* der Klasse $[m]$.

Literatur-/Lesevorschläge

A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, §1.2
H. J. Kowalsky, G. O. Michler, *Lineare Algebra*, §1.2