Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Zweite Woche, 16.4.2014

§2 Mengen, Abbildungen und Relationen

Nach Cantor fassen wir Mengen (naiv) als Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten auf.

Definition: Es sei M eine Menge. Ein Objekt, daß in M enthalten ist, heißt *Element* von M. Für ein solches Element m schreiben wir dann auch: $m \in M$. Ist ein Objekt m kein Element von M, dann schreiben wir $m \notin M$.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\} \text{ die natürlichen Zahlen,}\\
&\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ die natürlichen Zahlen mit 0,}\\
&\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \text{ die ganzen Zahlen,}\\
&\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\} \text{ die rationalen Zahlen.}\\
&\mathbb{R} := \text{ die Menge der reellen Zahlen,}\\
&\mathbb{R}_{\geq 0} := \text{ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.}
\end{aligned}$$

Das Symbol ":=" bedeutet "per Definition gleich" (oder "per definitionem" gleich). Hierbei wird die Schreibweise auf der linken Seite (in obigen Fällen die Symbole $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \dots$) durch die rechte Seite definiert.

Definition: Das Symbol $\emptyset$ bezeichnet die *leere Menge*.

Definition: Es sei M eine Menge und $A = A(m)$ eine Aussage über Element m in M. Dann:

$$\begin{aligned}
\forall m \in M : A(m) \text{ bedeutet:} &\quad \textit{für alle} \text{ Elemente } m \in M \text{ gilt } A(m).\\
\exists m \in M : A(m) \text{ bedeutet:} &\quad \textit{es gibt} \text{ ein Element } m \in M \text{ für das } A(m) \text{ gilt.}\\
\exists! m \in M : A(m) \text{ bedeutet:} &\quad \textit{es gibt genau ein} \text{ Element } m \in M \text{ für das } A(m) \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

Die Symbole $\forall, \exists$ nennt man *Quantoren*, wobei $\forall$ als *Allquantor* und $\exists$ als Existenzquantor bezeichnet werden.

Negation von Aussagen, die Quantoren enthalten:

Es sei M eine Menge und A eine Aussage über Elemente von M. Dann gilt:

$$\neg(\forall m \in M : A(m)) \Leftrightarrow \exists m \in M : \neg A(m)$$
$$\neg(\exists m \in M : A(m)) \Leftrightarrow \forall m \in M : \neg A(m)$$

Definition: Es seien M, N Mengen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} M \subset N &:\Leftrightarrow \forall m \in M : m \in N, \\ M \subsetneqq N &:\Leftrightarrow M \subset N \text{ und } \exists n \in N : n \notin M, \\ M = N &:\Leftrightarrow M \subset N \text{ und } N \subset M, \\ N \setminus M &:= \{n \mid n \in N \text{ und } n \notin M\}. \end{aligned}$$

Hier bedeutet "$:\Leftrightarrow$", daß die *Aussage* auf der linken Seite per Definition gleich der Aussage auf der rechten Seite ist.

Eins der Axiome der Mengenlehre sagt aus, daß es zu jeder Menge M auch deren *Potenzmenge* gibt, deren Elemente genau die Teilmengen von M sind.

Definition: Wir bezeichnen die Potenzmenge einer Menge M mit $\mathcal{P}(M)$.

Definition: Für Mengen M, N bezeichnen wir:

$M \cap N := \{m \mid m \in M \text{ und } m \in N\}$ den Durchschnitt von M und N,
$M \cup N := \{m \mid m \in M \text{ oder } m \in N\}$ die Vereinigung von M und N,
$M \times N := \{(m, n) \mid m \in M \text{ und } m \in N\}$ das kartesische Produkt von M und N.

Definition: Es seien M, N Mengen. Eine *Abbildung* f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem Element $m \in M$ genau ein Element $f(m) \in N$ zuordnet. Schreibweisen:

$$f : M \to N, \quad m \mapsto f(m), \qquad \text{oder} \qquad M \xrightarrow{f} N, \quad m \mapsto f(m).$$

Beispiele: Spezialfälle von Abbildungen sind:

(i) Ist $M = N$, dann heißt $\mathrm{id}_M : M \to M, m \mapsto m$ die *Identitätsabbildung* von M.

(ii) Gibt es ein $n \in N$, so daß $f(m) = n$ für alle $m \in M$, dann ist f eine *konstante* Abbildung.

Definition: Zwei Abbildungen $f, g : M \to N$ sind gleich $:\Leftrightarrow$ für alle $m \in M$ gilt: $f(m) = g(m)$.

Definition: Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist M der *Definitionsbereich* von f und N der *Wertebereich* von f. Für eine beliebige Teilmenge $P \subset M$ heißt $f(P) := \{f(p) \mid p \in P\} \subset N$ das *Bild* von P bzgl. der Abbildung f. Ist $P = M$, dann heißt $f(M)$ auch das *Bild von f*.

Für eine Teilmenge $Q \subset N$ heißt $f^{-1}(Q) := \{m \in M \mid f(m) \in Q\} \subset M$ das *Urbild* von Q bzgl. der Abbildung f. Für ein einzelnes Element $n \in N$ schreiben wir auch $f^{-1}(n)$ statt $f^{-1}(\{n\})$.

Definition: Es seien $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_2 \to M_3$ Abbildungen. Dann definieren wir die *Komposition* von f und g als:

$$g \circ f : M_1 \longrightarrow M_3, \quad m \mapsto g(f(m)).$$

Die Komposition ist also als Hintereinanderausführung zweier Abbildungen zu verstehen. Als Diagramm kann man das wie folgt verdeutlichen:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & M_2 \arrow[r, "g"] & M_3. \end{tikzcd}$$

Satz: *Es seien $f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$, $h : M_3 \to M_4$ Abbildungen. Dann gilt: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Die Komposition von Abbildungen erfüllt somit das *Assoziativgesetz*.

Definition: Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

- *injektiv*, wenn gilt: $\forall m, m' \in M : f(m) = f(m') \Rightarrow m = m'$.
- *surjektiv*, wenn gilt: $\forall n \in N\ \exists m \in M : f(m) = n$.
- *bijektiv* $:\Leftrightarrow$ f ist injektiv *und* surjektiv.

Satz: *Es seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn es zu jedem $n \in N$* genau ein *$m \in M$ gibt, so daß $f(m) = n$.*

Korollar: *Es seien M, N nichtleere Mengen und $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte, bijektive Abbildung $g : N \to M$, so daß gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.*

Definition: Es sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung g aus obigem Korollar das *Inverse*, bzw. die *Umkehrabbildung* von f. Diese wird auch mit f^{-1} bezeichnet.

Bemerkung: Im Tutorium wurde folgende Umkehrung besprochen:

Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen, für die gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Dann sind f und g bijektiv.

Warnung:

Leider hat sich die Schreibweise f^{-1} sowohl für die Umkehrabbildung als auch für das Urbild einer Abbildung eingebürgert, was leicht zu Verwechslungen führen kann. Es sei darauf hingewiesen, daß die Umkehrabbildung nur für bijektive Abbildungen definiert ist, wohingegen man Urbilder bezüglich beliebiger Abbildungen betrachten kann.

Definition: (i) Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* von M. Schreibweisen sind: $|M|$, bzw. $\#M$.

(ii) Wir nennen eine nichtleere Menge M *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sowie eine Bijektion $f : \{1, \dots, n\} \to M$.

(iii) Ist M nicht endlich, dann setzen wir $|M| := \infty$.

Satz: *Es seien M, N endliche Mengen gleicher Kardinalität und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist f bijektiv genau dann, wenn gilt: f ist injektiv* oder *f ist surjektiv.*

Literatur-/Lesevorschläge

G. Fischer, *Lineare Algebra*, §1.1
http://de.wikipedia.org/wiki/Griechisches_Alphabet