Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Vierzehnte & Fünfzehnte Woche, 16.7.2014

§10 Determinanten (Schluß)

Das folgende Resultat zeigt, daß die Determinante für jede quadratische Matrix definiert ist und (im Prinzip) ausgerechnet werden kann.

Satz (Leibniz-Formel)**:** *Es sei* $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$*. Dann gilt:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma(1)1}\cdots\alpha_{\sigma(n)n}.$$

Die folgenden Aussagen sind wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Determinanten.

Satz: *Es sei* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$*. Dann gilt:* $\det A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Rang}(A) < n$*.*

Insbesondere gilt also, daß $\det A \neq 0$ genau dann, wenn die Spaltenvektoren von A eine Basis von K^n bilden.

Satz: *Es seien* $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$*. Dann gilt:* $\det AB = \det A \cdot \det B$*.*

Satz: *Es sei* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$*. Dann gilt:* $\det A = \det A^t$*.*

Satz: *Es sei* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ *eine* Blockmatrix *der Form*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & D \end{pmatrix}$$

wobei $B \in \mathrm{Mat}_{r\times r}(K)$*,* $C \in \mathrm{Mat}_{r\times(n-r)}(K)$*,* $D \in \mathrm{Mat}_{(n-r)\times(n-r)}(K)$*. Dann gilt:*

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

Wir können diesen Satz per Induktion auf beliebige Matrizen in Blockdiagonalform erweitern:

Korollar: *Es sei*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & * & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_t \end{pmatrix}$$

wobei $A_i \in \mathrm{Mat}_{n_i\times n_i}(K)$ *und* $\sum_{i=1}^t n_i = n$*. Dann gilt:*

$$\det A = \prod_{i=1}^t \det A_i.$$

Definition: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ und $1, \leq i, j \leq n$. Dann bezeichne $A_{ij} \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$ die Untermatrix von A, die dadurch entsteht, daß die i-te Zeile und die j-te Spalte aus A entfernt werden:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Weiterhin bezeichnen wir mit $A'_{ij} := (\alpha'_{kl})$, wobei

$$\alpha'_{kl} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{wenn } k \neq i, l \neq j \\ 1 & \text{wenn } k = i, l = j \\ 0 & \text{sonst.,} \end{cases}$$

bzw.

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & 0 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j-1} & 0 & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,j-1} & 0 & \alpha_{i+1,j+1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & 0 & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Lemma: *Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Dann gilt:*

$$\det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n),$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A sind.

Definition: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Dann setzen wir $A^\# := (\alpha^\#_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, wobei $\alpha^\#_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji}$. Wir nennen $A^\#$ die zu A *adjungierte* Matrix.

Satz: *Es gilt $A^\# A = AA^\# = \det(A)\mathbf{1}_n$.*

Korollar: *Ist A invertierbar, dann gilt: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\#$.*

Satz (Laplacescher Entwicklungssatz)**:** *Es sei $A = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det A_{ij}.$$

Man nennt obige Formel auch die Entwicklung *nach der j-ten Spalte*. Via transposition kann man entsprechend auch nach der i-ten Zeile entwickeln.

Beispiele: 1) Für $n = 2$ gilt: $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

2) Für $n = 3$ gilt:

$$\begin{aligned}\det A &= \alpha_{11} \det A_{11} - \alpha_{21} \det A_{21} + \alpha_{31} \det A_{31} \\ &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.\end{aligned}$$

Diese Formel wird auch die *Sarrus*-Regel genannt.

Bemerkung: Man mache sich klar, daß zur Berechnung einer Determinante durch die Leibnizformel oder den Entwicklungssatz $n!$ Terme berechnet werden müssen. Dies bedeutet, daß diese Formeln für größere n keine praktische Möglichkeit sind, um eine Determinante auszurechnen und daher eher für theoretische Betrachtungen verwendet werden. Die entscheidende Eigenschaft, die es erlaubt, Determinanten auszurechnen, ist die Multilinearität. Wir haben bereits gesehen, daß eine Möglichkeit darin besteht, die Determinante durch Zeilentransformationen in obere Dreiecksform zu bringen und dann die Diagonalelemente zusammenzumultiplizieren. Effiziente Berechnungsmethoden verwenden in der Regel Varianten dieses Verfahrens.

Korollar (Cramersche Regel)**:** *Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $b \in K^n$. Dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, mit*

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

für alle $1 \leq i \leq n$.

Definition: Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ heißen *zueinander Konjugiert*, bzw *ähnlich*, wenn es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so daß gilt $B = TAT^{-1}$.

Sind A und B zueinander konjugiert, dann beobachten wir, daß gilt:

$$\det B = \det TAT^{-1} = \det T \cdot \det A \cdot \det T^{-1} = \det A.$$

Definition: Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann setzen wir $\det f := \det M_B^B(f)$.

Ist B' eine weitere Basis von V, dann gilt insbesondere, daß $M_B^B(f)$ und $M_{B'}^{B'}(f)$ zueinander konjugiert sind, da gilt:

$$M_{B'}^{B'}(f) = T_B^{B'} M_B^B(f) T_{B'}^B,$$

wobei $T_{B'}^B \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $T_B^{B'} = (T_{B'}^B)^{-1}$. Insbesondere hängt somit $\det f$ nicht von der Wahl der Basis B ab.

§11 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Auch in diesem Kapitel sei K stets ein Körper.

Definition: Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

(i) $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert* von f, wenn es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$.

(ii) Es sei $\lambda \in K$. Dann heißt $v \in V \setminus \{0\}$ mit $f(v) = \lambda v$ *Eigenvektor* zum Eigenwert λ.

(iii) Wir bezeichnen mit $\mathrm{Eig}(f,\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ den *Eigenraum* von f zu λ.

(iv) Die Menge $\sigma(f) := \{\lambda \in K \mid \mathrm{Eig}(f,\lambda) \neq \{0\}\}$ heißt das *Spektrum* von f.

Ist $A \,\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gegeben, dann beziehen wir die oben eingeführten Begriffe für die Abbildung $\phi_A : K^n \longrightarrow K^n$ auch auf A, d.h. wir sprechen dann von Eigenwert, Eigenraum, Eigenvektor und Spektrum von A.

Bemerkung: Wir beobachten, daß $\mathrm{Eig}(f,0)$ genau der Kern von f ist. Allgemeiner gilt für $v \in V$ und $\lambda \in K$:

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_V)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V).$$

Definition: Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

(i) f heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis B von V gibt, so daß $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

(ii) f heißt *trigonalisierbar*, wenn es eine Basis B von V gibt, so daß $M_B^B(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Ebenso bezeichnen wir eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ als diagonalisierbar (bzw. trigonalisierbar), wenn es ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so daß TAT^{-1} eine Diagonalmatrix (bzw. eine obere Dreiecksmatrix) ist.

Satz: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgene Aussagen äquvalent:*

(i) f ist diagonalisierbar.

(ii) V besitzt eine Basis von Eigenvektoren von f.

Definition: Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis B und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$\chi_f := \det(M_B^B(f) - X\mathbf{1}_n) \in K[X]$$

das *charakteristische Polynom* von f. Analog bezeichnen wir für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$:

$$\chi_A := \det(A - X\mathbf{1}_n) \in K[X]$$

das *charakteristische Polynom* von A.

Für alle $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt:

$$\det(TAT^{-1} - X\mathbf{1}_n) = \det(TAT^{-1} - TX\mathbf{1}_nT^{-1}) = \det T(A - X\mathbf{1}_n)T^{-1} = \det(A - X\mathbf{1}_n).$$

Somit hängt insbesondere χ_f nicht von der Wahl der Basis B ab.

Satz: *Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A.*

Definition: Die Abbildung $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$, $A = (\alpha_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} =: \mathrm{Spur}\, A$ bezeichnen wir als die *Spurabbildung*.

Die Spurabbildung hat folgende Eigenschaften für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$:

(i) $\mathrm{Spur}(A+B) = \mathrm{Spur}\, A + \mathrm{Spur}\, B$.

(ii) $\mathrm{Spur}\, AB = \mathrm{Spur}\, BA$.

(iii) Weiterhin gilt mit $T \in \mathrm{GL}_n(K)$: $\mathrm{Spur}(TAT^{-1}) = \mathrm{Spur}((AT^{-1})T) = \mathrm{Spur}(A)$.

Satz: *Es gilt:*

$$\chi_A = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0,$$

wobei $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Spur}(A)$ *und* $a_0 = \det A$.

Definition: Es sei V ein Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt *f-invariant*, wenn gilt $f(U) \subset U$.

Lemma: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung und $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum. Dann gilt:*

(i) Die Abbildung $f_{V/U} : V/U \longrightarrow V/U$, $[v] \mapsto [f(v)]$ ist wohldefiniert und linear.

(ii) Es gilt: $\chi_f = \chi_{f|_U} \cdot \chi_{f_{V/U}}$.

Satz: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann trigonalisierbar, wenn χ_f in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, so daß $\chi_f = (-1)^n(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$.*

Folgender Satz, den wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht zeigen können, ist eine der grundlegensten Aussagen überhaupt:

Satz (Der Fundamentalsatz der Algebra)**:** *Jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ besitzt eine Nullstelle.*

Als Korollar folgt hieraus, daß jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Insbesondere ist also jede quadratische Matrix mit komplexen Einträgen trigonalisierbar.

Definition: Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

(i) Eine aufsteigende Kette von Untervektorräumen

$$\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$$

heißt *Fahne* in V.

(ii) Gilt $\dim V = r$, dann heißt die Fahne *vollständig* (dann gilt insbesondere auch $\dim V_i = i$ für alle $1 \leq i \leq r$).

(iii) Sind die V_i f-invariant, so heißt die Fahne f-invariant.

Satz: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann trigonalisierbar, wenn es eine vollständige, f-invariante Fahne in V gibt.*

Definition: Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $\lambda \in K$. Dann gilt $\chi_A = (X-\lambda)^k$ mit $k \geq 0$ und $g(\lambda) \neq 0$.

(i) k heißt die *algebraische Vielfachheit* von λ als Eigenwert von A.

(ii) $\dim \mathrm{Eig}(f,\lambda)$ heißt die *geometrische Vielfachheit* von λ als Eigenwert von A.

Analog spricht man auch von der algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit einer lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$.

Lemma: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann ist f genau dann diagonalisierbar, wenn gilt*

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(f)} \mathrm{Eig}(f,\lambda).$$

Satz: *Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist diagonalisierbar.

(ii) χ_f zerfällt in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.

Literatur-/Lesevorschläge

Jedes beliebige Buch oder sonstige Quelle zur Linearen Algebra.