Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Dreizehnte Woche, 2.7.2014

§9 Der Gauß-Algorithmus (Ende)

Bestimmung des Inversen einer Matrix

Ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann gilt insbesondere $\mathrm{Rang}(A) = n$ und die reduzierte ZNF von A ist gleich der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_n$. Dies bedeutet insbesondere, daß es Zeilentransformationen $S_1, \ldots, S_p \in \mathcal{Z}$ gibt, so daß

$$S_p S_{p-1} \cdots S_1 A = \mathbf{1}_n.$$

Insbesondere gilt also:

$$S_p S_{p-1} \cdots S_1 = A^{-1}.$$

Daraus ergibt sich somit ein einfaches Verfahren, um A^{-1} zu bestimmen:

Überführe A durch Zeilentransformationen nach $\mathbf{1}_n$ und wende simultan genau die gleichen Zeilentransformationen auf $\mathbf{1}_n$ an:

$$\begin{array}{rcr} A & | & \mathbf{1}_n \\ S_1 A & | & S_1 \mathbf{1}_n \\ & \vdots & \\ S_p \cdots S_1 A & | & S_p \cdots S_1 \mathbf{1}_n \end{array}$$

Am Ende steht auf der linken Seite $\mathbf{1}_n$ und auf der rechten A^{-1}.

Auf ähnliche Weise lassen sich zu einer Matix $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ Matrizen S, T bestimmen, so daß SAT^{-1} in Normalform sind. Hierbei starten wir mit dem Schema

$$\mathbf{1}_m \qquad\qquad A \qquad\qquad \mathbf{1}_n.$$

Wir führen dann auf der linken Seite parallel die Zeilentransformationen von A mit durch und auf der rechten Seite die Spaltentransformationen. Am Ende bekommen wir somit:

$$S_p \cdots S_1 \mathbf{1}_m \qquad\qquad S_p \cdots S_1 A T_1 \cdots T_q \qquad\qquad \mathbf{1}_n T_1 \cdots T_q$$

wobei links die Matrix S, rechts T^{-1} und in der Mitte die Normalform von A stehen. Bei Bedarf kann man T selber durch Invertieren mittels des weiter oben beschriebenen Verfahrens bekommen.

Bemerkung: Man beachte, daß die Matrizen S und T im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sind und von der Wahl der Zeilen- und Spaltentransformationen abhängen. Für den Fall, daß A invertierbar ist, gilt jedoch *immer*, daß die Matrix A^{-1} eindeutig bestimmt ist.

Lösen linearer Gleichungssysteme

Wir wollen folgendes Problem betrachten: es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung von endlich-dimensionalen Vektorräumen. Wie können wir Bild und Kern von f bestimmen? Was ist das Urbild $f^{-1}(w)$ eines gegebenen Elementes $w \in W$?

Mit Hilfe des Homomorphiesatzes für Vektorräume können wir das Problem in zwei Teile zerlegen. Mit Hilfe des kanonischen Isomorphismus

$$V/\operatorname{Kern}(f) \longrightarrow \operatorname{Bild}(f)$$

können wir jedes Element $w \in \operatorname{Bild}(f)$ mit mit einer Nebenklasse $[v] \in V/\operatorname{Kern}(f)$ identifizieren, wobei $v \in V$, so daß $f(v) = w$. Dann gilt für jedes weitere $v' \in V$, daß $f(v') = f(v) = w \Leftrightarrow v - v' \in \operatorname{Kern}(f)$, also

$$f(v') = w \Leftrightarrow v' \in v + \operatorname{Kern}(f).$$

Unser Problem läßt sich somit in zwei Teile aufteilen:

1) Stelle fest, ob ein gegebenes $w \in W$ im Bild von f liegt und, falls ja, bestimme ein spezielles Element $v \in f^{-1}(w)$ (einen *Repräsentanten* des Urbilds $f^{-1}(w)$).

2) Bestimme den Kern von f.

Mit Hilfe von Basen $B = b_1, \ldots, b_n$ und $C = c_1, \ldots, c_m$ von V und W mit den zugehörigen Isomorphismen $\psi_B : V \longrightarrow K^n$ und $\psi_C : W \longrightarrow K^m$ können wir diese Fragestellung in eine Fragestellung über Matrizen und somit in ein rein rechnerisches Problem umwandeln. Dazu betrachten wir $v \in V$ und $w \in W$. Da ψ_C ein Isomorphismus ist, ist die Gleichung $f(v) = w$ äquivalent zur Gleichung $(\psi_C \circ f)(v) = \psi_C(w)$. Schreiben wir nun trivialerweise (man bedenke $\psi_B^{-1} \circ \psi_B = \operatorname{id}_V$) $v = (\psi_B^{-1} \circ \psi_B)(v)$, dann ist $f(v) = w$ äquivalent zu:

$$(\psi_C \circ f)((\psi_B^{-1} \circ \psi_B)(v)) = (\psi_C \circ f \circ \psi_B^{-1})(\psi_B(v)) = M_C^B(f)(\psi_B(v)) = \psi_C(w).$$

Setzen wir nun $x = (x_1, \ldots, x_n) := \psi_B(v)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) := \psi_C(w)$, $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} := M_C^B(f)$ (wobei wir x und b als Spaltenvektoren auffassen), dann vereinfacht sich die letzte Gleichung zu:

$$Ax = b.$$

Auf beiden Seiten steht jeweils ein Spaltenvektor der Länge m, wobei die Gleichung komponentenweise wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Definition: Es seien $A = (\alpha_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ und $b \in K^m$. Dann bezeichen wir als *erweiterte Matrix* $A|b \in \operatorname{Mat}_{m \times n+1}(K)$ die Matrix, zu der b als $n{+}1$-ste Spalte hinzugefügt wird:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Satz: *Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn* $\mathrm{Rang}(A|b) = \mathrm{Rang}(A)$.

Bemerkung: Es folgt unmittelbar, daß ein *homogenes* Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ immer lösbar ist.

Wir beobachten nun, daß für alle $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ gilt:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad (SA)x = Sb.$$

Insbesondere können wir also auf beiden Seiten Zeilentransformationen anwenden, ohne die Lösungsmenge zu verändern. Der Gauß-Algorithmus besteht somit aus folgenden Schritten:

1. Überführe die erweiterte Matrix $A|b$ durch Zeilentransformationen in ZSF.

2. Überprüfe, ob $\mathrm{Rang}(A|b) = \mathrm{Rang}(A)$. Ist $A|b$ in ZSF, bedeutet dies: haben die ZSF von $A|b$ und A die gleiche Anzahl von Stufen? Falls ja, dann ist das Gleichungssystem lösbar.

3. Bestimme eine spezielle Lösung des Gleichungssytem.

4. Bestimme die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dies ist äquivalent zur Bestimmung einer Basis von $\mathrm{Kern}(\phi_A)$.

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung setzen wir induktiv:

$$y_r := b_r / a_{rj_r} \qquad \text{und} \qquad y_{r-i} := \frac{1}{a_{r-i,j_r-i}}(b_{r-i} - \sum_{k=0}^{i-1} a_{r-i,j_r-k} y_{r-k}) \text{ für } 1 \leq i < r.$$

Dann ist eine Spezielle Lösung gegeben durch:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ wobei } x_j = \begin{cases} y_k & \text{falls } j = j_k \in \{j_1, \ldots, j_r\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Verfahren heißt auch *Rückwärtssubstitution.*

Um eine Basis von $\mathrm{Kern}(\phi_A)$ zu bestimmen, ist die reduzierte ZSF am geeignetsten. Ist A in reduzierter ZFS, dann verifiziert man leicht, daß Vektoren von folgender Form Lösungen von $Ax = b$. Für $1 \leq k < r$ und $j_k < j < j_{k+1}$ und $j_r < j \leq n$ setzen wir:

$$B_j = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ wobei } \beta_i = \begin{cases} -\alpha_{lj} & \text{für } l \leq k \text{ und } i = j_l \\ 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin setzen wir für $1 \leq j < j_1$:

$$B_j = e_j,$$

wobei e_j den j-ten Standardbasisvektor von K^n bezeichnet. Offenbar haben wir somit $n - r = \dim \mathrm{Kern}(\phi_A)$ Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ gefunden. Da für jedes $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$ gilt, daß der j-te Eintrag von B_j gleich 1 ist, aber der j-te

Eintrag für alle anderen B_k gleich 0 ist, sieht man leicht ein, daß diese Lösungen linear unabhängig sind und somit eine Basis des Lösungsraums bilden.

Man beachte, daß in der reduzierten ZSF die spezielle Lösung direkt abzulesen ist. Die Rückwärtssubstitution vereinfacht sich zu:

$$y_i := b_i \text{ für } 1 \leq i \leq r,$$

also ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$x_j = \begin{cases} y_k & \text{falls } j = j_k \in \{j_1, \ldots, j_r\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

§10 Determinanten

Wir werfen zunächste noch einmal einen Blick auf die symmetrische Gruppe Sym_n.

Für jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ schreiben wir:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Ein Element $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ heißt *Transposition*, wenn es $1 \leq i \neq j \leq n$ gibt, so daß $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ und $\sigma(k) = k$ für all $k \neq i, j$. Wir schreiben eine Transposition von i und j auch als (i, j).

Satz: *Für $n \geq 2$ ist jedes $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ ein Produkt von Transpositionen der Form $(i, i+1)$ mit $1 \leq i < n$.*

Definition: Es sei $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$. Dann definieren wir das *Signum* von σ als

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Man sieht leicht ein, daß $\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Satz: *Die Abbildung $\mathrm{sgn} : \mathrm{Sym}_n \longrightarrow \{-1, 1\}$, $\sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Insbesondere gilt also für alle $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}_n$, daß $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau)$.*

Korollar: *Es gilt $\mathrm{sgn}((i, i+1)) = -1$.*

Korollar: *Ist $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ das Produkt von N Transpositionen, dann gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^N$.*

Definition: Die Untergruppe $A_n := \mathrm{Kern}(\mathrm{sgn}) \subset \mathrm{Sym}_n$ heißt *alternierende Gruppe.*

Es sei von nun an K ein beliebiger Körper.

Definition: Eine Abbildung $\det : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$, $A \mapsto \det A$ heißt *Determinante*, wenn gilt:

(i) det ist linear in jeder Spalte, d.h. wenn wir schreiben $A = (a_1, \ldots, a_n)$, wobei die a_i Spaltenvektoren sind, dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$ und alle Linearkombinationen $a_i = \lambda a_i' + \mu a_i''$ mit $\lambda, \mu \in K$, daß

$$\det A = \lambda \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n) + \mu \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i'', a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

(ii) Sind zwei Spalten von A identisch, dann ist $\det A = 0$.

(iii) $\det \mathbf{1}_n = 1$.

Wir beobachten:

1. Für $\lambda \in K$ gilt: $\det \lambda \cdot A = \lambda^n \cdot \det A$.
2. Ist $a_i = 0$ für ein i, dann gilt $\det A = 0$.

Satz: *(i) Für* $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ *gilt* $\det(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \det(a_1, \ldots, a_n)$.

(ii) Für $1 \leq i \neq j \leq n$ *und* $\lambda \in K$ *gilt:* $\det Q_{ij}(\lambda) = 1$.

(iii) Für $1 \leq i \leq n$ *und* $\lambda \in K$ *gilt* $\det S_k(\lambda) = \lambda$.

Insbesondere gilt für die Permutationsmatrizen aus §7: $\det P_\sigma = \det Q_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

Literatur-/Lesevorschläge

Jedes beliebige Buch oder sonstige Quelle zur Linearen Algebra.