Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Zwölfte Woche, 25.6.2014

§8 Der Rang einer Linearen Abbildung

Auch in diesem Abschnitt sei K stets ein Körper.

Definition: Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann definieren wir den *Rang* von f als

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim \mathrm{Bild}(f).$$

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ setzen wir $\mathrm{Rang}(A) := \mathrm{Rang}(\phi_A)$.

Satz: *Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Rang}(f).$$

Korollar: *Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt* $\mathrm{Rang}(A) = n$.

Satz: *(i) Es seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$ lineare Abbildungen. Dann gilt:*

$$\mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g) - n \leq \mathrm{Rang}(f \circ g) \leq \min(\mathrm{Rang}(f), \mathrm{Rang}(g)).$$

(ii) Sind $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(K)$, dann gilt:

$$\mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B) - n \leq \mathrm{Rang}(AB) \leq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)).$$

Satz: *(i) Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Rang}(f + g) \leq \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$

(ii) Für $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gilt:

$$\mathrm{Rang}(A + B) \leq \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B).$$

Satz: *Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es Basen B und C von V und W, so daß*

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}.$$

(Wir schreiben hier $\mathbf{0}_{k\times l}$ für die Nullmatrix in $\mathrm{Mat}_{k\times l}(K)$).

Definition: Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ heißen *äquivalent*, wenn es $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_m(K)$ gibt, so daß $B = SAT^{-1}$.

Bemerkung: Man sieht leicht ein, daß die Äquivalenz tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ definiert.

Korollar: *Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ sind genau dann äquivalent, wenn gilt* $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$.

Definition: $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r)\times r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ heißt *Normalform* einer Matrix A mit $\mathrm{Rang}(A) = r$ bezüglich Äquivalenz.

Definition: Die *Transpositionsabbildung* ist gegeben als Abbildung

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times m}(K), A \mapsto A^t,$$

die die Rolle von Zeilen und Spalten vertauscht, d.h. für $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ gilt:

$$A^t = (\alpha_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}.$$

A^t heißt dann die *Transponierte* von A.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die Transpositionsabbildung linear ist. Weiterhin sind folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gilt: $(A^t)^t = A$.

(ii) Für alle $A \in \mathrm{Mat}_{m\times k}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{k\times n}(K)$ gilt:

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

(iii) Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gilt: $A^t \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Definition: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{SRang}(A) := \dim\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ den *Spaltenrang* von A. Der *Zeilenrang* von A ist gegeben durch $\mathrm{ZRang}(A) := \mathrm{SRang}(A^t)$.

Es folgt unmittelbar aus der Definition, daß gilt:

$$\mathrm{SRang}(A) = \mathrm{Rang}(A) \quad \text{und} \quad \mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{Rang}(A^t).$$

Proposition: *Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, $T \in \mathrm{GL}_m(K)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{ZRang}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{ZRang}(A) \quad \textit{und} \quad \mathrm{SRang}(S \cdot A \cdot T) = \mathrm{SRang}(A),$$

sowie

$$\mathrm{Bild}(\phi_{A^tS^t}) = \mathrm{Bild}(\phi_{A^t}) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Bild}(\phi_{AT}) = \mathrm{Bild}(\phi_A).$$

Satz: *Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{SRang}(A) = \mathrm{ZRang}(A).$$

§9 Der Gauß-Algorithmus

Auch in diesem Abschnitt sei K ein Körper.

Im vorherigen Abschnitt haben wir Äquivalenz von Matrizen der Form

$$B = SAT^{-1}$$

betrachtet, wobei $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $S \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$. Hier stellt sich die Frage, wie man etwas zu gegebenen A, B, die Matrizen S und T konkret berechnen kann. Ein Hilfsmittel hierzu sind die sogenannten elementaren Zeilen- und Spaltentransformationen.

Elementare Zeilentransformationen

Es sei eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ gegeben.

1) Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K^*$:

Für $\lambda \in K^*$ und $1 \leq k \leq m$ setzen wir:

$$S_k(\lambda) = (s_{ij})_{1\leq i,j\leq m}, \qquad \text{wobei} \qquad s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \text{ und } i, j \neq k, \\ \lambda & \text{wenn } i = j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also:

$$S_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

wobei λ als k-ter Diagonaleintrag auftaucht und alle nichtangegebenen Einträge gleich 0 sind. Die Produktmatrix

$$A' = (\alpha'_{ij}) := S_k(\lambda)A$$

hat dann Einträge

$$\alpha'_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{wenn } i \neq k \\ \lambda\alpha_{ij} & \text{wenn } i = k, \end{cases}$$

d.h. die Einträge der k-ten Zeile von A werden mit λ multipliziert. Man überlegt sich auch leicht, daß gilt:

$$S_k(\lambda)S_k(\lambda^{-1}) = \mathbf{1}_n,$$

also gilt insbesondere, daß $S_k(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

2) Vertauschung zweier Zeilen:

Für $1 \leq i \neq j \leq m$ setzen wir:

$$P_{ij} = (p_{kl})_{1 \leq k,l \leq m}, \qquad \text{wobei} \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = l \text{ und } k \notin \{i,j\}, \\ 1 & \text{wenn } \{k,l\} = \{i,j\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& \\ &&& 0 & 1 && & 0 &&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&& 0 &&& 1 & 0 &&& \\ &&& 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

wobei die von der Diagonalen abweichenden Elemente in der i-ten bzw. j-ten Zeile liegen. Diese Matrizen sind Spezialfälle der Permutationsmatrizen, die wir im vorherigen Abschnitt betrachtet haben. Die Produktmatrix

$$A' = (\alpha'_{kl}) := P_{ij}A$$

hat dann Einträge

$$\alpha'_{kl} = \begin{cases} \alpha_{kl} & \text{wenn } k \notin \{i,j\}, \\ \alpha_{jl} & \text{wenn } k = i, \\ \alpha_{il} & \text{wenn } k = j. \end{cases}$$

d.h. die Einträge der i-ten und j-ten Zeilen von A werden vertauscht. Außerdem gilt:

$$P_{ij}P_{ij} = \mathbf{1}_n,$$

also gilt insbesondere, daß $P_{ij} \in \mathrm{GL}_n(K)$.

3) Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine andere:

Für $1 \leq i \neq j \leq m$ und $\lambda \in K$ setzen wir:

$$Q_{ij}(\lambda) = (q_{kl})_{1 \leq k,l \leq m}, \qquad \text{wobei} \qquad q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = l, \\ \lambda & \text{wenn } k = i \text{ und } l = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also:

$$Q_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 && \lambda && \\ &&& \ddots &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

wobei also der einzige von 0 verschiedene Eintrag außerhalb der Diagonalen in der i-ten Zeile und j-ten Spalte mit Wert λ sitzt. Die Produktmatrix

$$A' = (\alpha'_{kl}) := Q_{ij}(\lambda)A$$

hat dann Einträge

$$\alpha'_{kl} = \begin{cases} \alpha_{il} + \lambda\alpha_{jl} & \text{wenn } k = i, \\ \alpha_{kl} & \text{sonst.} \end{cases}$$

d.h. die λ-fachen der Einträge der j-ten Zeile werden auf die i-ten Zeilen von A addiert. Außerdem gilt:

$$Q_{ij}(\lambda)Q_{ij}(-\lambda) = \mathbf{1}_n,$$

also gilt insbesondere, daß $Q_{ij}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Elementare Spaltentransformationen

Analog zu den Zeilenoperationen können wir auch Spaltentransformationen definieren. Dabei gilt folgendes:

1) Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \in K^*$:

Wir definieren die Matrizen $S_k(\lambda)$ wie oben, allerdings diesesmal als $n \times n$-Matrizen, also $S_k(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Die Multiplikation der k-ten Spalte von A mit λ entspricht dann einer Multiplikation *von rechts* mit $S_k(\lambda)$:

$$AS_k(\lambda).$$

2) Vertauschung zweier Spalten:

Mit P_{ij} wie oben mit $1 \leq i \neq j \leq n$ erhält man durch

$$AP_{ij}$$

die Vertauschung der i-ten mit der j-ten Spalte.

3) Addition eines Vielfachen einer Spalte auf eine andere:

Mit

$$AQ_{ij}(\lambda)$$

addiert man das λ-fache der i-ten Spalte auf die j-te Spalte. Man beachte, daß hierbei die Rollen von i und j gegenüber der Zeilentransformation vertauscht sind.

Definition: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$.

(i) A besitzt *Zeilenstufenform (ZSF)*, falls es $0 \leq r \leq m$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq m$ gibt, so daß

1) Für alle $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq j_i$ gilt: $\alpha_{ij} = 0$.
2) Für alle $r < i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt: $\alpha_{ij} = 0$.

3) Für alle $1 \leq i \leq r$ gilt: $\alpha_{ij_i} \neq 0$.

Eine Matrix in ZSF hat also folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & & & & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{2j_2} & * & \cdots & & & & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{3j_3} & * & & \cdots & & * \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & \alpha_{rj_r} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

(ii) Eine ZSF heißt *reduziert*, falls zusätzlich gilt:

4) Für alle $1 \leq i \leq r$ gilt: $a_{ij_i} = 1$.

5) Für alle $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq k < i$ gilt: $a_{kj_i} = 0$.

Eine Matrix in reduzierter ZSF hat also folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Satz: *(i) Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ läßt sich durch endlich viele elementare Zeilentransformationen in eine reduzierte ZFS überführen.*

(ii) Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ läßt sich durch endlich viele elementare Zeilen- und Spaltentransformationen in Normalform überführen.

Zu (i):

Zunächst bringt man A in ZSF, indem wir folgende 4-schrittige Prozedur anwenden:

Schritt 1: Durchlaufe die Spalten von A von links nach rechts und von oben nach unten, bis der erste Eintrag $a_{i_1j_1} \neq 0$ gefunden ist:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & 0 & & & \\
\vdots & & \vdots & \alpha_{i_1j_1} & & & \\
\vdots & & \vdots & * & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & *
\end{pmatrix}$$

Findet man kein solches $a_{i_1 j_1}$, dann ist A die Nullmatrix und wir sind fertig.

Schritt 2: Ist $i_1 \neq 1$, dann vertausche die Zeilen 1 und i_1.

Schritt 3: Nun ist $a_{1,j_1} \neq 0$, dann addieren wir für alle $2 \leq k \leq m$ das $-\frac{a_{kj_1}}{a_{1j_1}}$-fache der ersten Zeile auf die k-te Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1j_1} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Betrachte nun die Untermatrix A', die aus den Einträgen der Matrix A rechts unterhalb von α_{1j_1} besteht, d.h $A' = (\alpha_{ij})_{\substack{2 \leq i \leq m \\ j_1 < j \leq n}}$. Hat A' mindestens eine Zeile, dann fahre mit Schritt 1 und A' fort.

Man überführt also mit endlich vielen Iterationen der Schritte 1 bis 4 die Matrix A in ZSF. Um eine reduzierte ZSF zu erhalten, führen wir noch folgende Schritte durch:

1) Für alle $1 \leq i \leq r$ multiplizieren wir die i-te Zeile mit $a_{ij_i}^{-1}$.
2) Für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $1 \leq k < i$ addieren wir das $(-a_{kj})$-fache der i-ten Zeile zur k-ten Zeile.

Zu (ii):

Um A in Normalform zu überführen, bringen wir A zunächst in reduzierte ZSF. Es bleiben dann folgende *Spalten*transformationen durchzuführen:

1) Für alle $1 \leq i \leq r$ und alle $1 \leq j \neq j_i \leq n$ addiere das $(-a_{ij})$-fache der j_i-ten Spalte auf die j-te Spalte. Das Ergebnis sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & \cdots & 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & & & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2) Durch Spaltenvertauschung können wir diese Matrix nun in die endgültige Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(n-r) \times r} & \mathbf{0}_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$$

überführen.

Bezeichnen wir $\mathcal{Z} := \{P_{ij} \mid 1 \le i \le m\} \cup \{Q_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in K, 1 \le i \neq j \le m\} \cup \{S_k(\lambda) \mid \lambda \in K, 1 \le k \le m\} \subset \mathrm{GL}_m(K)$, dann können wir eine endliche Abfolge von Zeilentransformationen als endliches Produkt von Matrizen auffassen:

$$S_s S_{s-1} \cdots S_1 A,$$

wobei $S_1, \ldots, S_s \in \mathcal{Z}$. Ebenso, mit $\mathcal{S} := \{P_{ij} \mid 1 \le i \le n\} \cup \{Q_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in K, 1 \le i \neq j \le n\} \cup \{S_k(\lambda) \mid \lambda \in K, 1 \le k \le n\} \subset \mathrm{GL}_n(K)$ können wir eine endliche Abfolge von Spaltentransformationen als endliches Produkt von Matrizen auffassen:

$$AT_1 T_2 \cdots T_t,$$

mit $T_1, \ldots, T_t \in \mathcal{S}$. Überführen wir also eine Matrix in (reduzierte) ZSF oder Normalform, so bleibt auf jeden Fall der Rang der Matrix erhalten. Wir erhalten sogar eine explizite Methode, um S und T zu berechnen, so daß

$$SAT = \text{Normalform},$$

nämlich, mit $S = S_s \cdots S_1$ und $T = T_1 \cdots T_t$, wobei S_i und T_j die Zeilen- und Spaltentransformationen repräsentieren, die dazu durchzuführen sind.

Bemerkung: Wenn man sich obige algorithmische Beschreibung zur Überführung in die Normalform genauer anschaut, dann sieht man, daß sich nach Überführung in die ZSF die Anzahl der Zeilen durch die restlichen Zeilen- und Spaltentransformationen nicht mehr ändert. Den Rang einer Matrix entspricht also der Anzahl der Nichtnullzeilen der ZSF.

Literatur-/Lesevorschläge

Jedes beliebige Buch oder sonstige Quelle zur Linearen Algebra.