Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Elfte Woche, 18.6.2014

§7 Lineare Abbildungen und Matrizen

Auch in diesem Abschnitt sei K stets ein Körper.

Satz: *Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $b_1, \ldots, b_n$ und W ein beliebiger K-Vektorraum. Dann gibt es zu jeder Familie von Elementen $w_1, \ldots, w_n \in W$ genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$, so daß $f(b_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = b_1, \ldots b_n$ und man betrachte eine Zuordnung $B \longrightarrow W$ $b_i \mapsto w_i$. Dann nennen wir die dadurch gegebene lineare Abbildung die *lineare Fortsetzung* dieser Zuordnung.

Beispiel: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$. Dann haben wir in §5 gesehen, daß A eine lineare Abbildung $\phi_A : K^n \longrightarrow K^m$, $v \mapsto A \cdot v$ definiert. Für die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ gilt insbesondere:

$$\phi_A(e_i) = A \cdot e_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Insbesondere gilt also, daß die Spalten der Matrix A, als Vektoren in K^m aufgefaßt, das Bild der Abbildung ϕ_A in K^m erzeugen.

Man kann auch den umgekehrten Weg gehen: wir bezeichnen die Standardbasis von K^n und K^m mit $e_1, \ldots, e_n$, bzw. $f_1, \ldots, f_m$ und es sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ irgendeine lineare Abbildung. Dann gilt für jedes $1 \leq j \leq n$:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$$

mit $\alpha_{ij} \in K$. Laufen wir über alle i, j, so können wir die α_{ij} zu einer Matrix zusammenfassen.

Definition: Für obige Abbildung f bezeichnen wir die durch die Bilder der Basisvektoren definierte Matrix $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ mit M_f.

Satz: *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$.*

(i) Es sei $f : K^n \longrightarrow K^m$ eine lineare Abbildung. Dann gilt: $\phi_{M_f} = f$.

(ii) Es sei $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$. Dann gilt $M_{\phi_A} = A$.

(iii) Die Abbildung $\Phi : \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, $A \mapsto \phi_A$ *ist ein Vektorraumisomorphismus mit Umkehrrabbildung* $\Psi : \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, $f \mapsto M_f$.

Wir erinnern uns aus §5 daran, daß $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ mit Hilfe der Matrixmultiplikation sogar ein Ring ist.

Korollar: *Die Abbildung* $\Phi : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{End}(K^n)$ *ist ein Ringisomorphismus.*

Satz: *Es sei* V *ein* n*-dimensionaler* K*-Vektorraum und es bezeichne* $e_1, \ldots, e_n$ *die Standardbasis von* K^n.

(i) Ist $B = b_1, \ldots, b_n$ *eine Basis von* V*, dann ist die durch die Zuordnung* $b_i \mapsto e_i$ *definierte lineare Abbildung* $\psi_B : V \longrightarrow K^n$ *ein Isomorphismus.*

(ii) Ist $g : V \longrightarrow K^n$ *ein Vektorraumisomorphismus, dann bilden* $g^{-1}(e_1), \ldots, g^{-1}(e_n)$ *eine Basis von* V.

Insbesondere ist also jeder n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n.

Definition: Es seien V, W K-Vektorräume mit Basen $B = b_1, \ldots, b_n$ und $C = c_1, \ldots, c_m$ für V, bzw. W und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$M_C^B(f) := \psi_C \circ f \circ \psi_B^{-1} : K^n \longrightarrow K^m$$

die *Koordinatendarstellung* von f bzgl. der Basen B und C. Hierbei sind ψ_B und ψ_C Isomorphismen wie im vorigen Satz.

Man kann die Koordinatendarstellung auch mit Hilfe eines kommutativen Diagramms verbildlichen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\psi_C"] \\ K^n \arrow[u, "\psi_B^{-1}"] \arrow[r, "\psi_c \otimes f \circ \psi_B^{-1}"] & K^m \end{tikzcd}$$

Definition: Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und B, B' Basen von V. Dann setzen wir:

$$T_{B'}^B := M_{B'}^B(\mathrm{id}_V) = \psi_{B'} \circ \psi_B^{-1}.$$

$T_{B'}^B$ heißt *Basiswechsel* oder auch *Koordinatentransformation.*

Satz (Basiswechsel)**:** *Es seien* V, W *endlich-dimensionale* K*-Vektorräume und* B, B' *Basen von* V *und* C, C' *Basen von* W*. Dann gilt für eine Abbildung* $f : V \longrightarrow W$*:*

$$M_{C'}^{B'} = T_{C'}^C \circ M_C^B(f) \circ T_B^{B'}.$$

Bemerkung: Mit der hier eingeführten Notation gilt für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$, daß $A = M_F^E(\phi_A)$, wobei E und F die Standardbasen von K^n bzw. K^m sind. Um schwerfällige Schreibweisen wie z.B. $\phi_{M_C^B(f)}$ zu vermeiden, werden wir im Folgenden an einigen Stellen eine Matrix A mit ihrer Abbildung ϕ_A identifizieren. Man achte beim Lesen darauf, was an der entsprechenden Stelle gemeint ist, da die Unterscheidung wesentlich sein kann.

Wir beobachten, daß für Basen B, B', B'' von V gilt:

$$T_{B''}^{B'} \circ T_{B'}^{B} = T_{B''}^{B}.$$

Weiterhin können wir im Spezialfall mit $V = W$, $B = C$, $B' = C'$, mit $A := M_B^B(f)$, $A' := M_{B'}^{B'}(f)$, $T := T_{B'}^B$ schreiben:

$$A' = T \circ A \circ T^{-1}.$$

Man beachte, daß für je zwei Basen B, B', die Koordinatentransformationen $T_{B'}^B$ und $T_B^{B'}$ *invers* zueinander sind, d.h. es gilt:

$$T_{B'}^B \circ T_B^{B'} = \psi_{B'} \circ \psi_B^{-1} \circ \psi_B \circ \psi_{B'}^{-1} = \mathrm{id}_{K^n}, \quad \text{sowie} \quad T_B^{B'} \circ T_{B'}^B = \mathrm{id}_{K^n}.$$

Definition: Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Wir bezeichnen mit $\mathbf{1}_n \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ die *Einheitsmatrix*

$$\mathbf{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gibt, mit $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}_n$.

Die Menge der invertierbaren Matrizen bildet offenbar die Einheitengruppe im Matrizenring $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$.

Definition: Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Dies Gruppe heißt die *allgemeine lineare Gruppe.*

Definition: Zwei Matrizen A, A' heißen *ähnlich* oder *konjugiert zueinander*, wenn es ein $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, so daß $A' = T \circ A \circ T^{-1}$.

Wir werden zu einem späteren Zeitpunkt wieder auf den Begriff der Konjugation zurückkommen.

Satz: *Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $B = b_1, \ldots, b_n$ eine Basis. Dann ist die Abbildung*

$$\Phi : \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{n\times n}(K),\ f \mapsto M_B^B(f)$$

ein Ringisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\Psi : \mathrm{Mat}_{n\times n}(K) \longrightarrow \mathrm{End}(V), A \mapsto \psi_B \cdot \phi_A \cdot \psi_B^{-1}.$$

Die Einschränkung von Φ auf $\mathrm{Aut}(V)$ ergibt einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Aut}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$.

Bemerkung: Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann sind die Spaltenvektoren die Bilder der Standardbasisvektoren von K^n bzgl. der Abbildung ϕ_A und bilden eine Basis, da ϕ_A nach dem letzten Satz ein Isomorphismus ist. Umgekehrt kann man jede geordnete Basis $b_1, \ldots, b_n$ von K^n als Spalten einer $n \times n$-Matrix auffassen, notwendigerweise in $\mathrm{GL}_n(K)$ enthalten ist.

Wir betrachten nun einen Vektorraum V und eine Basis $B = b_1, \ldots, b_n$. Wir wollen den Aspekt des Basiswechsels in V unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Per Definition ist ein Basiswechsel gegeben durch die Auswahl einer Basis B' von V, und wir haben:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \arrow[d, "\psi_{B'}"] \\ K^n \arrow[u, "\psi_B^{-1}"] \arrow[r, "T_{B'}^B"] & K^m \end{tikzcd}$$

Andererseits ergibt noch obiger Bemerkung die Wahl einer Basis B' eine invertierbare Abbildung $f_{B'}^B : V \longrightarrow V,\ b_i \mapsto b_i'$, d.h. wir haben bezüglich der festen Basis B ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f_{B'}^B"] & V \arrow[d, "\psi_B"] \\ K^n \arrow[u, "\psi_B^{-1}"] \arrow[r, "M_B^B(f_{B'}^B)"] & K^m \end{tikzcd}$$

wobei $M_B^B(f_{B'}^B) = \psi_B \circ f_{B'}^B \circ \psi_B^{-1}$. Wie hängen $T_{B'}^B$ und $M_B^B(f_{B'}^B)$ zusammen? Wir rechnen nach, daß für einen Standardbasisvektor e_i von K^n gilt:

$$\begin{aligned} T_{B'}^B \circ M_B^B(f_{B'}^B)(e_i) &= \psi_{B'} \circ \psi_B^{-1} \circ \psi_B \circ f \circ \psi_B^{-1}(e_i) \\ &= \psi_{B'} \circ f \circ \psi_B^{-1}(e_i) \\ &= M_{B'}^B(f)(e_i) \\ &= e_i. \end{aligned}$$

Somit ist also $T_{B'}^B \circ M_B^B(f_{B'}^B) = \mathrm{id}_{K^n}$ und somit ist $M_B^B(f_{B'}^B) = T_B^{B'}$ das Inverse zu $T_{B'}^B$.

Permutationsmatrizen

Basen sind immer geordnet, d.h. für eine Basis $B = b_1, \ldots, b_n$ und eine Permutation $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ betrachten wir die Basen B und $\sigma(B) := b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)}$ als voneinander verschieden. Die entsprechende Koordinatentransformation berechnen wir wie folgt. Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$T_{\sigma(B)}^B(e_i) = \psi_{\sigma(B)} \circ \psi_B^{-1}(e_i) = \psi_{\sigma(B)}(b_i) = e_{\sigma^{-1}(i)}.$$

Man beachte im letzten Schritt, daß gilt $j = \sigma^{-1}(i) \Leftrightarrow \sigma(j) = i$, da σ nach Voraussetzung eine Bijektion ist. Umgekehrt berechnet man:

$$T_B^{\sigma(B)}(e_i) = \psi_B \circ \psi_{\sigma(B)}^{-1}(e_i) = \psi_B(b_{\sigma(i)}) = e_{\sigma(i)}.$$

Wir bezeichnen mit P_σ und Q_σ die darstellenden Matrizen von $T_{\sigma(B)}^B$ bzw. von $T_B^{\sigma(B)}$. Dann gilt offensichtlich $P_\sigma = Q_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. Die Einträge von P_σ und Q_σ sind wie folgt:

$$P_\sigma = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \qquad \text{mit} \qquad p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = \sigma^{-1}(j) \quad (\Leftrightarrow \sigma(i) = j) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$Q_\sigma = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \qquad \text{mit} \qquad q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zwei Matrizen P_σ und Q_σ sind somit nicht nur invers zueinander, sondern auch *transponiert*, d.h. es gilt $p_{ij} = q_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Für zwei Permutationen σ, τ rechnen wir nach:

$$Q_{\tau \circ \sigma} = Q_\tau \circ Q_\sigma.$$

Satz: *Die Abbildung* $\mathrm{Sym}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$, $\sigma \mapsto Q_\sigma$ *ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.*

Wir betrachten nun eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$, wobei wir für V und W Basen $B = b_1, \ldots, b_n$ und $C = c_1, \ldots, c_m$ haben. Außerdem wählen wir zwei Permutationen $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$ und $\tau \in \mathrm{Sym}_n$ mit denen wir die permutierten Basen $\sigma(B)$ und $\tau(C)$ erhalten. Damit haben wir folgende Koordinatentransformationen:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V \arrow[d, shift right, "\psi_B"'] \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, shift right, "\psi_C"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & W \arrow[d, "\psi_{\tau(C)}"] \\
K^n \arrow[u, "\psi^{-1}_{\sigma(B)}"] \arrow[r, "T_B^{\sigma(B)}"'] & K^n \arrow[u, shift right, "\psi_B^{-1}"'] \arrow[r, "M_C^B(f)"'] & K^m \arrow[u, shift right, "\psi_C^{-1}"'] \arrow[r, "T^C_{\tau(C)}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Die neue Darstellende Matrix für f ist somit $M^{\sigma(B)}_{\tau(C)}(f) = T^C_{\tau(C)} \circ M_C^B(f) \circ T_B^{\sigma(B)} = P_\tau \circ M_C^B(f) \circ Q_\sigma$, wobei $P_\tau \in \mathrm{GL}_m(K)$ und $Q_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ die entsprechenden Permutationsmatrizen sind. Man rechnet nach, daß folgende Rechenregeln für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $\sigma \in \mathrm{Sym}_n$, $\tau \in \mathrm{Sym}_m$ gelten:

1) Die Matrix $A \cdot Q_\sigma$ entsteht aus der Matrix A durch Vertauschung der Spalten von A gemäß der Permutation σ.

2) Die Matrix $P_\tau \cdot A$ entsteht aus der Matrix A durch Vertauschung der Zeilen von A gemäß der Permutation τ^{-1}.

Literatur-/Lesevorschläge

S. Bosch, *Lineare Algebra*, §7.5, Aufgabe 3
G. Fischer, *Lineare Algebra*, §2.6