Fakultät für Mathematik
Heinrich Heine-Universität Düsseldorf

PD Dr. Markus Perling
Sommersemester 2014

Lineare Algebra 1

Zehnte Woche, 11.6.2014
i. V. Thomas Leßmann

§6 Erzeugendensysteme, Basen und Dimension (Ende)

Beispiel: (1) $\dim(K^n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (da $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Basis ist).

(2) $\dim(\mathrm{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$

(3) $\dim(K[X]) = \infty$ und $\dim(\underbrace{\{a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \mid a_0, \ldots, a_n \in K\}}_{=:U_n}) = n + 1$

(es ist leicht zu verstehen, dass U_n ein Untervektorraum von $K[X]$ mit Basis $1, X, \ldots, X^n$ ist.)

Definition: Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_r$ Untervektorräume von V. Dann wird *die Summe* dieser Untervektorräume erklärt durch

$$\sum_{i=1}^{r} U_i = U_1 + U_2 + \ldots + U_r = \{\sum_{i=1}^{r} u_i \mid u_i \in U_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq r\}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß $\sum\limits_{i=1}^{r} U_i$ ein Untervektorraum von V ist. Zum Beispiel gilt die additive Abgeschlossenheit, denn:
Seien $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_r, u' = u_1' + u_2' + \ldots + u_r' \in U_1 + U_2 + \ldots + U_r$, so gilt

$$u + u' = \underbrace{u_1 + u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{u_2 + u_2'}_{\in U_2} + \ldots + \underbrace{u_r + u_r'}_{\in U_r} \in U_1 + U_2 + \ldots + U_r.$$

Satz: *Es sei V ein K-Vektoraum, $U_1, \ldots, U_r$ Untervektorräume von V und $U := \sum\limits_{i=1}^{r} U_i$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Jedes $u \in U$ hat eine Darstellung $u = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i$ mit eindeutig bestimmten Vektoren $u_i \in U_i$ für $1 \leq i \leq r$.

(ii) Aus einer Gleichung $\sum_{i=1}^{r} u_i = 0$ mit $u_i \in U_i$ für alle $1 \leq i \leq r$ folgt $u_i = 0$ für alle i.

(iii) Für jedes $1 \leq j \leq r$ gilt: $U_j \cap \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} U_i = \{0\}$.

Beweis. (mit Ringschluss) „(i)⇒(ii)“ Sei $\underbrace{u_1}_{\in U_1} + \underbrace{u_2}_{\in U_2} + \ldots + \underbrace{u_r}_{\in U_r} = 0$. Da es auch die Darstellung $\underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} + \ldots + \underbrace{0}_{\in U_r} = 0$ gibt, liefert die Eindeutigkeit in (i) für $u = 0$, dass $u_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt.
„(ii)⇒(iii)“ Sei $1 \leq j \leq r$. Wir zeigen $U_j \cap \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} U_i \subset \{0\}$ (die andere Inklusion ist klar). Sei dazu $u \in U_j \cap \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} U_i$, dann schreibe $u = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i$ mit $u_i \in U_i$ für alle $i \neq j$. Durch Umstellen dieser Gleichung erhalten wird

$$\underbrace{u_1}_{\in U_1} + \ldots + \underbrace{u_{j-1}}_{\in U_{j-1}} + \underbrace{-u}_{\in U_j} + \underbrace{u_{j+1}}_{\in U_{j+1}} + \ldots + \underbrace{u_r}_{\in U_r} = 0$$

und mit (ii) folgt nun $u = 0$.
„(iii)⇒(i)“ Nach Definition von U besitzt jedes $u \in U$ eine solche Darstellung. Um die Eindeutigkeit zu zeigen sei $u \in U$ und $u = \sum_{i=1}^{r} u_i = \sum_{i=1}^{r} u_i'$ zwei Darstellungen mit $u_i, u_i' \in U_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Durch Umstellen der letzten Gleichung (alle Summanden mit Index j auf eine Seite und alle anderen auf die andere Seite) folgt

$$\underbrace{u_j' - u_j}_{\in U_j} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i - u_i' \in U_j \cap \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} U_i = \{0_V\}\,,$$

also $u_j' - u_j = 0_V$, d.h. $u_j = u_j'$. Da dies für alle $1 \leq j \leq r$ gilt, sind die beiden Darstellungen gleich. □

Definition: Es seien V ein K-Vektorraum und $U = \sum_{i=1}^{r} U_i$ eine Summe von Untervektorräumen $U_1, \ldots, U_r$. Dann heißt U die *direkte Summe* der U_i, wenn die äquivalenten Bedingungen des vorigen Satzes erfüllt sind. Wir schreiben dann $U = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r$.

Bemerkung: Für $r = 2$ ist die Summe $U = U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ (vgl. Bed. (iii)).
Für $r \geq 3$ genügt die Bedingung $U_i \cap U_j = \{0_V\}$ für alle Indices $i \neq j$ im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt: Betrachte in $\mathbb{R}^3$ die Unterkvektorräume $U_1 = \langle (1,0) \rangle$, $U_2 = \langle (0,1) \rangle$ und $U_3 = \langle (1,1) \rangle$. Hier gilt $U_i \cap U_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$, aber $\underbrace{(1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in U_2} + \underbrace{(-1,-1)}_{\in U_3} = (0,0)$ zeigt, dass die Bedingung (ii) verletzt ist, d.h. $U_1 + U_2 + U_3$ ist keine direkte Summe.

Satz: *Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es einen Untervektorraum $U' \subset V$ mit $V = U \oplus U'$. Für jedes solche U' gilt:*

$$\dim V = \dim U + \dim U'.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$ und $u_1, u_2, \ldots, u_r$ eine Basis von U. Nach dem Basisergänzungssatz können wir diese durch geeignete Vektoren $u_{r+1}, \ldots, u_n$ zu einer Basis von V

ergänzen. Wir definieren $U' = \langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle$ und zeigen $V = U \oplus U'$. Dazu:
Schritt 1 ($V = U + U'$): Die Inklusion "$\supset$" ist klar. Um die andere Inklusion zu zeigen, sei $v \in V$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r}_{\in U} + \underbrace{\lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_n u_n}_{\in U'} \in U + U'.$$

Schritt 2 (Summe ist direkt): Wir prüfen die Bedingung (ii). Sei $u + u' = 0$ mit $u \in U, u' \in U'$. Schreibe $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$ und $u' = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i u_i$. Dann ist $0 = u + u' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Da $u_1, \ldots, u_n$ eine Basis von V ist, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, also $u = u' = 0$.
Wir haben den ersten Teil bewiesen und prüfen nun die Dimensionsformel. Sei U' ein beliebiger Untervektorraum mit $U \oplus U' = V$ und $u_{r+1}, \ldots, u_m$ eine Basis von U'. Wir zeigen, dass dann $u_1, \ldots, u_m$ eine Basis von V ist. Wenn wir dies gezeigt haben folgt $n = m$ und $\underbrace{n}_{=\dim(V)} = \underbrace{r}_{=\dim(U)} + \underbrace{(n-r)}_{=\dim(U')}$.
Zur linearen Unabhängigkeit: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r}_{=:u \in U} + \underbrace{\lambda_{r+1} u_{r+1} + \ldots + \lambda_m u_m}_{:=u' \in U'} = 0.$$

Nach der Bedingung (ii) für direkte Summen folgt $u = u' = 0$ und hieraus $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ (beachte, dass $u_1, \ldots, u_r$ Basis von U und $u_{r+1}, \ldots, u_m$ Basis von U').
Erzeugendensystem: Sei $v \in V$. Schreibe $v = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ mit $u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i$, $u' = \sum_{i=r+1}^{m} \lambda_i u_i$. Einsetzen in $v = u + u'$ liefert $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$. $\square$

Definition: Man nennt U' ein *Komplement* zu U in V.

Beispiel: Zu dem Untervektorraum $U = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle \subset \mathbb{R}^3$ sind z.B. $U' = \langle (0,0,1) \rangle$ und $U'' = \langle (0,1,3) \rangle$ Komplemente. Dieses Beispiel zeigt, dass Komplente im Allgemeinen nicht eindeutig sind.

Satz: *Es seien V ein endlich dimensionaler Vektorraum und U, U' Untervektorräume von V. Dann gilt:*

$$\dim U + \dim U' = \dim(U + U') + \dim(U \cap U').$$

Beweis. $U \cap U'$ ist Untervektorraum von U und von U'. Wähle Komplemente $W \subset U$ und $W' \subset U'$ mit

$$U = (U \cap U') \oplus W \text{ und } U' = (U \cap U') \oplus W'. \tag{1}$$

Nach vorherigem Satz wissen wir, dass

$$\dim(U) = \dim(U \cap U') + \dim(W) \text{ und } \dim(U') = \dim(U \cap U') + \dim(W'). \tag{2}$$

Wir zeigen nun, dass

$$U + U' = W \oplus (U \cap U') \oplus W' \tag{3}$$

gilt. Daraus können wir dann sofort unsere Behauptung folgern, da (für das zweite Gleichheitszeichen benutzen wir wieder den vorherigen Satz und danach (2))

$$\begin{aligned}&\dim(U+U') = \dim(W \oplus (U \cap U') \oplus W')\\ = \quad&\underbrace{\dim(W)}_{=\dim(U)-\dim(U\cap U')} + \dim(U\cap U') + \underbrace{\dim(W')}_{=\dim(U')-\dim(U\cap U')} = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U')\end{aligned}$$

Zu (3), Schritt 1: Zeige $U + U' = W + (U \cap U') + W'$.
„$\subset$“: Sei $u + u' \in U + U'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$. Dann gibt es (siehe (1)) $v_1, v_2 \in U \cap U'$, $w \in W$ und $w' \in W'$ mit $u = v_1 + w$ und $u' = v_2 + w'$. Also $u + u' = w + \underbrace{v_1 + v_2}_{\in U\cap U'} + w' \in W + (U \cap U') + W'$.
„$\supset$“: Sei $w + u + w' \in W + (U \cap U') + W'$ mit $w \in W, u \in U \cap U'$ und $w' \in W'$. Dann gilt (siehe (1)) $\underbrace{w + u}_{\in U} + w' \in U + U'$.
Zu (3), Schritt 2: Die Summe ist direkt. Hierzu prüfen wir die Bedingung (ii):
Sei $0 = w + u + w'$ mit $w \in W, u \in U \cap U'$ und $w' \in W'$. Da $U = (U \cap U') \oplus W$ (siehe (1)) wissen wir nach der Bemerkung auf Seite 2, dass

$$(U \cap U') \cap W = \{0_V\}\,.$$

Um nun $w = 0$ zu zeigen, prüfen wir, dass w in $(U \cap U') \cap W$ liegt. Dabei ist $w \in W$ und wegen $W \subset U$ (siehe (1)) auch $w \in U$. Umstellen von $w + u + w' = 0$ liefert $w = -u - w' \in U'$. Analog zeigt man $w' = 0$ und aus $w + u + w' = 0$ folgt dann auch $u = 0$. □

Literatur-/Lesevorschläge

S. Bosch, *Lineare Algebra*, §1.5 (insbesondere der Abschnitt zur Existenz von Basen in beliebigen Vektorräumen), §1.6
G. Fischer, *Lineare Algebra*, §1.6
A. Beutelspacher, *Lineare Algebra*, §3.3